14.7
57q

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine.* — Fascicule 15.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LES GROUPES D'ORDRE FINI ET LES GROUPES FINIS CONTINUS

PAR

RAYMOND LE VAVASSEUR
Maître de conférences de mathématiques à la Faculté des sciences
de l'Université de Lyon.

LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1904

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class Book Volume
514.7
~~512.864~~ L57q

Ja 09-20M

UNIVERSITY OF
ILLINOIS LIBRARY
AT URBANA-CHAMPAIGN
MATHEMATICS

Return this book on or before the **Latest Date** stamped below. A charge is made on all overdue books.

University of Illinois Library

april 15, 50

L161—H41

LIBRARY U. OF ILL. URBANA-CHAMPAIGN

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR

LES GROUPES D'ORDRE FINI

ET

LES GROUPES FINIS CONTINUS

Lyon. — A. REY, Imprimeur de l'Université, 4, rue Gentil. — 36530.

Exemplaire N° 373

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
NOUVELLE SÉRIE
I. *Sciences, Médecine.* — Fascicule 15.

LIBRARY
UNIVERSITY OF ILLINOIS
URBANA

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR

LES GROUPES D'ORDRE FINI

ET

LES GROUPES FINIS CONTINUS

PAR

RAYMOND LE VAVASSEUR
Maître de conférences de mathématiques à la Faculté des sciences
de l'Université de Lyon.

LYON
A. REY, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
Rue Gentil, 4

PARIS
LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins

1904

514.7
~~512.864~~
L57g

84Ja10EE

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR LES GROUPES D'ORDRE FINI

ET

LES GROUPES FINIS CONTINUS.

J'ai réuni dans ce travail des résultats non encore publiés de mes recherches sur les groupes d'ordre fini. Ce Mémoire est divisé en six Parties.

Dans la première Partie, j'expose un mode de formation d'une table de multiplication pour un groupe régulier quelconque. Je définis des nombres dont la loi de multiplication correspond au même groupe régulier et j'ébauche les premières propositions de la théorie de tels nombres, théorie qui revient à celle de certaines transformations linéaires spéciales.

Dans la deuxième Partie, je montre comment d'un groupe d'ordre fini on peut déduire des groupes finis continus, soit en considérant le groupe lui-même, soit en envisageant le groupe de ses isomorphismes.

J'ai donné de nombreux exemples en vérifiant chaque fois que les équations obtenues définissent bien un groupe, et en me servant en particulier, pour les obtenir, des groupes d'isomorphismes des groupes d'ordre p^4 (p étant un nombre premier plus grand que 3).

La troisième Partie a trait aux groupes d'ordre 32.

Leur énumération est chose faite; aussi je me suis contenté

131565

de donner, en ne considérant que les plus intéressants de ces groupes, quelques-unes de leurs propriétés : nombre d'opérations d'ordre donné, groupe des isomorphismes cogrédients, faisceaux, substitutions génératrices du groupe régulier correspondant.

La quatrième Partie donne les propriétés de quelques groupes d'ordre 2^n. La méthode que j'ai utilisée pour énumérer les groupes d'ordre 2^5 s'applique à l'énumération des groupes d'ordre 2^n, et permet de la pousser aussi loin que l'on veut.

Je publie quelques-uns des résultats que j'ai ainsi obtenus.

Dans la cinquième Partie, il s'agit des groupes d'ordre p^5 ($p > 3$) (p est un nombre premier). Considérant l'énumération comme faite, je me suis occupé surtout d'indiquer brièvement les congruences dont la discussion conduit, non seulement à trouver les groupes d'ordre p^5, mais, avec quelques légères modifications, à obtenir tous leurs isomorphismes. A chaque système de congruences ainsi donné correspond un ou plusieurs groupes dont on ne saura déterminer les isomorphismes. On pourrait en déduire, comme je l'ai montré dans la deuxième Partie, toute une série de groupes finis continus.

La sixième Partie est consacrée aux groupes d'ordre 3^5, et rédigée dans le même ordre d'idées.

J'avertis le lecteur qu'il est possible qu'un même groupe se présente, plusieurs fois, avec des équations de définition différentes. Je me suis efforcé d'éviter ces répétitions. Mais je ne suis pas certain d'y être complètement parvenu.

Je prends la liberté de rappeler que, dans sa séance du 3 août 1896, l'Académie des Sciences a accepté sous le n° 5287 un pli cacheté où j'avais consigné les résultats que j'avais obtenus pour l'énumération des groupes d'ordre p^5. Je me proposais de revoir tous mes calculs avant de les publier, lorsque l'apparition du Mémoire de M. Bagnera m'en a détourné.

CHAPITRE PREMIER.

TABLE DE MULTIPLICATION.

1. J'imagine un tableau carré contenant n lignes et n colonnes, numérotées $1, 2, \ldots, n$, de sorte que chaque case est déterminée par deux nombres, α et β, α étant le rang de la ligne et β celui de la colonne auxquelles la case appartient.

Choisissons n cases du tableau en nous assujettissant simplement à prendre une case et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Supposons que la case de $i^{\text{ième}}$ ligne soit dans la colonne α_i; nous avons ainsi déterminé une substitution

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Réciproquement : à toute substitution telle que s on peut faire correspondre sans ambiguïté un système de n cases du tableau tel qu'il y ait une case et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Pour abréger le langage, nous appellerons *file de cases*, ou simplement *file*, un système de n cases tel qu'il y ait une case et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

La file dont les cases sont toutes sur la diagonale principale du tableau (celle qui descend de la gauche vers la droite) correspond à la substitution identique.

2. Deux cases a et b, rangées dans l'ordre a, b, sont dites *consécutives* si la colonne où se trouve la case a, et la ligne où se trouve la case b se croisent sur la diagonale principale.

On voit immédiatement que la recherche des cases consécutives d'une file revient à la recherche des cycles de la substitution qui correspond à la file.

3. Soient s et t deux files représentant deux substitutions S et T. La file st qui correspond à la substitution ST s'obtient comme il suit : soient a, b deux cases consécutives prises dans l'ordre a, b, a faisant partie de la file s, b faisant partie de la file t : la case qui est dans la même ligne que a, et dans la même colonne que b, fait partie de la file st.

4. Soit G un groupe d'ordre n, dont les opérations sont $a_1 = 1, a_2, \ldots, a_n$. Formons un tableau carré de n lignes de n colonnes.

Écrivons dans chaque case du tableau une opération de G d'après la loi suivante : l'opération a_{ij} écrite dans la ligne de rang i et dans la colonne de rang j satisfera à l'égalité

$$a_i a_{ij} = a_j.$$

La table ainsi obtenue s'appellera *table de multiplication* de G.

On a

$$a_i a_k = a_{\varphi_k(i)}.$$

Laissons fixe l'indice k, et faisons $i = 1, 2, \ldots, n$, on aura

$$a_k = a_{1, \varphi_k(1)} = a_{2, \varphi_k(2)} = \ldots = a_{n, \varphi_k(n)}.$$

A chaque opération de G on fait ainsi correspondre une substitution. On sait que ces substitutions forment un groupe dont l'ordre égale le degré, groupe simplement isomorphe à G [1].

5. Définitions des nombres A.

---

[1] Burnside, *Theory of groups of finite order*, n° 20, p. 22.

Je considère les opérations $a_1, \ldots, a_m$ du groupe G d'ordre m, comme des *signes*.

Soit α un *nombre*. Pour l'affecter du signe a_p, j'écrirai soit αa_p soit $a_p \alpha$ indifféremment.

J'appelle nombre A tout nombre de la forme

$$A = a_1 \alpha_1 + \ldots + a_m \alpha_m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont dits les termes de A.

Exemple. — Soient a et b deux *signes* tels qu'on ait

$$a^3 = b^2 = 1, \qquad ab = ba^2.$$

$A = \alpha + \beta\alpha + \gamma\alpha^2 + \delta b + \varepsilon ab + \zeta a^2 b = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta)$ sera un nombre A correspondant au groupe symétrique de trois lettres.

6. *Égalité.* — Deux nombres A,

$$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \qquad B = (\beta_1, \ldots, \beta_m),$$

sont dits *égaux* et l'on écrit $A = B$ si l'on a :

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \beta_m.$$

Le nombre $(0, \ldots, 0)$ s'écrira simplement 0.

7. $A + B$ sera par définition $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_m + \beta_m)$.

8. Soit à multiplier $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ par $B = (\beta_m, \ldots, \beta_m)$.

Par définition, *en tenant compte de l'ordre dans lequel on écrit les facteurs,*

$$AB = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \alpha_p \beta_q a_p a_q,$$

$a_p a_q$ sera égal à l'un des signes $a_{p,q}$ de la suite $a_1, \ldots, a_m$; on

aura

$$AB = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m), \qquad \text{avec} \qquad \gamma_p = \alpha_{p_1}\beta_{q_1} + \ldots + \alpha_{p_m}\beta_{q_m}$$

où

$$p_1, \ \ldots, \ p_m \qquad \text{et} \qquad q_1, \ \ldots, \ q_m$$

représentent des permutations des nombres $1, 2, \ldots, m$.

On aura aussi :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha_{h_{11}}\beta_1 + \ldots + \alpha_{h_{1m}}\beta_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_m &= \alpha_{h_{m1}}\beta_1 + \ldots + \alpha_{h_{mm}}\beta_m, \end{aligned}$$

$h_{11}, \ldots, h_{1m}; \ldots; h_{m1}, \ldots, h_{mm}$; et aussi $h_{11}, \ldots, h_{m1}; \ldots;$ $h_{1m}, \ldots, h_{mm}$ sont des permutations des nombres $1, \ldots, m$.

On en déduit l'égalité :

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_m = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)(\beta_1 + \ldots + \beta_m).$$

En général AB et BA seront des nombres A différents.

Exemple :

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta b + \varepsilon ab + \zeta a^2 b \\ A' &= \alpha' + \beta' a + \gamma' a^2 + \delta' b + \varepsilon' ab + \zeta' a^2 b \end{aligned} \qquad (a^3 = b^2 = 1, ab = ba^2).$$

Alors

$$AA' = \alpha'' + \beta'' a + \gamma'' a^2 + \delta'' b + \varepsilon'' ab + \zeta'' a^2 b$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' + \beta\gamma' + \gamma\beta' + \delta\delta' + \varepsilon\varepsilon' + \zeta\zeta', \\ \beta'' &= \alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\gamma' + \delta\zeta' + \varepsilon\delta' + \zeta\varepsilon', \\ \gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\beta' + \gamma\alpha' + \delta\varepsilon' + \varepsilon\zeta' + \zeta\delta', \\ \delta'' &= \alpha\delta' + \beta\zeta' + \gamma\varepsilon' + \delta\alpha' + \varepsilon\beta' + \zeta\gamma', \\ \varepsilon'' &= \alpha\varepsilon' + \beta\delta' + \gamma\zeta' + \delta\gamma' + \varepsilon\alpha' + \zeta\beta', \\ \zeta'' &= \alpha\zeta' + \beta\varepsilon' + \gamma\delta' + \delta\beta' + \varepsilon\gamma' + \zeta\alpha'. \end{aligned}$$

Ici, outre l'égalité

$$\begin{aligned} &(\alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \delta'' + \varepsilon'' + \zeta'') \\ &\quad = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \zeta + \varepsilon)(\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \zeta' + \varepsilon'), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}&(\alpha'' + \beta'' + \gamma'' - \delta'' - \varepsilon'' - \zeta'')\\ &\quad = (\alpha + \beta + \gamma - \delta - \zeta - \varepsilon)(\alpha' + \beta' + \gamma' - \delta' - \zeta' - \varepsilon').\end{aligned}$$

9. Le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_{h_{11}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{h_{m1}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} \end{vmatrix}$ s'appellera la n de $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

On le désignera par $n(A)$. La condition pour que de l'égalité $AA' = AA''$ on puisse conclure $A' = A''$ est que la n de A soit différente de O.

Si la n de A était nulle, on pourrait trouver un nombre A autre que o, soit A′, tel que AA′ fût nul.

Si, au contraire, on n'envisage que des nombres A dont la n n'est pas nulle, un produit de deux nombres A ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

Le déterminant $n(A)$ a été obtenu en multipliant A *à droite* par A′. En multipliant A *à gauche* par A′, le déterminant correspondant obtenu, formé des éléments de A, s'appellera la n' de A et sera désigné par $n'(A)$. Ce que nous avons dit pour la n de A peut se répéter pour la n' de A.

Ainsi, lorsque $A = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta b + \varepsilon ab + \zeta a^2 b$,

$$n(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \beta & \alpha & \gamma & \varepsilon & \zeta & \delta \\ \gamma & \beta & \alpha & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \alpha & \gamma & \beta \\ \varepsilon & \zeta & \delta & \beta & \alpha & \gamma \\ \zeta & \delta & \varepsilon & \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad n'(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta & \varepsilon & \zeta \\ \beta & \alpha & \gamma & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \beta & \alpha & \varepsilon & \zeta & \delta \\ \delta & \zeta & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\ \varepsilon & \delta & \zeta & \gamma & \alpha & \beta \\ \zeta & \varepsilon & \delta & \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

10. L'ensemble des nombres A forme un *corps*.

Les nombres $a_1, \dots, a_m$ forment une base de ce corps.

Soit $A = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$.

On a

$$\begin{aligned} A a_1 &= \alpha_{h_{11}} a_1 + \dots + \alpha_{h_{1m}} a_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A a_m &= \alpha_{h_{m1}} a_1 + \dots + \alpha_{h_{mm}} a_m. \end{aligned}$$

Donc l'équation

$$n_s(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \alpha_{h_{11}} - s & \alpha_{h_{12}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \alpha_{h_{21}} & \alpha_{h_{22}} - s & \dots & \alpha_{h_{2m}} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \alpha_{h_{m1}} & \alpha_{h_{m2}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} - s \end{vmatrix} = 0$$

sera vérifiée par le nombre A, $\mathrm{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

Le produit des racines de l'équation $n_s(\mathrm{A}) = 0$ est $\pm n(\mathrm{A})$.

A vérifie aussi identiquement l'équation $n'_s(\mathrm{A}) = 0$.

Reprenons le déterminant

$$n(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \alpha_{h_{11}} & \alpha_{h_{12}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \alpha_{h_{21}} & \alpha_{h_{22}} & \dots & \alpha_{h_{2m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{h_{m1}} & \alpha_{h_{m2}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} \end{vmatrix}.$$

Multiplions les éléments de la première colonne par a_1, ceux de la deuxième par a_2, ..., ceux de la $m^{\text{ième}}$ colonne par a_m; ajoutons les $(m-1)$ dernières colonnes à la première.

Comme $a_1 = 1$, on a

$$n(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{A}a_1 & \alpha_{h_{12}} & \dots & \alpha_{h_{1m}} \\ \mathrm{A}a_2 & \alpha_{h_{22}} & \dots & \alpha_{h_{2m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}a_m & \alpha_{h_{m2}} & \dots & \alpha_{h_{mm}} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$n(\mathrm{A}) = \mathrm{A}\overline{\mathrm{A}}.$$

$\overline{\mathrm{A}}$ est un nombre A dont les termes sont des fonctions *entières* et homogènes des termes de A.

Par exemple, si les termes de A sont des nombres *entiers*, les termes de $\overline{\mathrm{A}}$, comme le nombre $n(\mathrm{A})$, sont des nombres entiers.

On aura de même

$$n'(\mathrm{A}) = \underline{\mathrm{A}}.\mathrm{A},$$

avec les mêmes remarques sur les termes de $\underline{\mathrm{A}}$.

11. Soit $\mathrm{X} = \mathrm{BY}$. On a, en posant $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathrm{Y} = (y_1, \ldots, y_m)$, $\mathrm{B} = (\beta_1, \ldots \beta_m)$,

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{h_{11}} y_1 + \ldots + \beta_{h_{1m}} y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_m &= \beta_{h_{1m}} y_1 + \ldots + \beta_{h_{mm}} y_m. \end{aligned}$$

Le déterminant de cette transformation linéaire est $n(\mathrm{B})$.

12. Soit

$$\mathrm{F} = \mathrm{AX}, \qquad \mathrm{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \qquad \mathrm{F} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m),$$

$\mathrm{F} = \mathrm{AX}$ définit une transformation linéaire dont le déterminant est $n(\mathrm{A})$. Mais on a

$$\mathrm{F} = \mathrm{AX}, \qquad \mathrm{X} = \mathrm{BY}, \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{F} = \mathrm{ABY}.$$

Le déterminant de cette dernière fonction linéaire est $n(\mathrm{AB})$ et l'on a, comme on sait,

$$n(\mathrm{AB}) = n(\mathrm{A})\, n(\mathrm{B})$$

[d'après la théorie des transformations linéaires].

De même

$$n'(\mathrm{AB}) = n'(\mathrm{A})\, n'(\mathrm{B})$$

13. Si l'on écrit $n(\mathrm{A})$, et que, à la place de $\alpha_{h_{11}}, \alpha_{h_{21}}, \ldots, \alpha_{h_{m1}}$, on mette $a_1, \ldots, a_m$ ou, d'une façon générale, a_i à la place de tous les éléments du déterminant $n(\mathrm{A})$ égaux à $\alpha_{h_{11}}, \ldots, a_m$ à la place de tous les éléments égaux à $\alpha_{h_{m1}}$, on a la Table de multiplication du groupe.

Ainsi

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & a^2 & a & b & ab & a^2 b \\ a & 1 & a^2 & ab & a^2 b & b \\ a^2 & a & 1 & a^2 b & b & ab \\ b & ab & a^2 b & 1 & a^2 & a \\ ab & a^2 b & b & a & 1 & a^2 \\ a^2 b & b & ab & a^2 & a & 1 \end{array}\right|$$

est la Table de multiplication du groupe G_6^1,

$$a^3 = b^2 = 1, \qquad ab = ba^2,$$

CHAPITRE II.

14. Supposons que le groupe G soit *engendré* par les opérations $a_1, \ldots, a_n$, de telle sorte qu'on ait toutes les opérations du groupe en prenant l'expression

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}, \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqq \alpha_1 \leqq m_1 - 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq \alpha_n \leqq m_n - 1.$$

On aura

$$a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_n^{r_n} . a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} = a_1^{\varphi_1(x, \alpha)} \ldots a_n^{\varphi_n(x, \alpha)}$$

et la transformation

$$x'_i \equiv \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad (\text{mod}\, m_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

correspondra à l'opération $a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$ de telle sorte que le groupe des transformations $x'_i \equiv \varphi_i(x, \alpha)$ $(\text{mod}\, m_i)$ et le groupe des opérations donné seront simplement isomorphes.

Or j'ai constaté que les équations $x'_i = \varphi_i(x, a)\,(i = 1, \ldots, n)$, où je considère les α comme des paramètres, sont les équations de définition d'un groupe fini continu. J'ai trouvé également des groupes finis continus en usant du même procédé à l'égard du groupe des isomorphismes du groupe G.

Pour s'expliquer comment on obtient des groupes continus, on peut observer que les équations de définition du groupe G, qui sert de point de départ, peuvent se séparer en deux catégories, dont la première sera

$$a_1^{m_1} = 1, \qquad \ldots, \qquad a_n^{m_n} = 1,$$

la deuxième catégorie comprenant toutes les autres équations de définition.

Or les congruences que l'on obtient s'établissent par des calculs qui n'utilisent que les équations de la deuxième catégorie. Ces congruences ont lieu respectivement suivant les modules $m_1, \ldots, m_n$, et leurs coefficients sont également pris chacun suivant l'un de ces modules.

Donnons à $m_1, \ldots, m_n$ divers systèmes de valeurs, sans changer les équations de définition de la deuxième catégorie. La forme du système de congruences obtenues ne changera pas. Seuls les modules changeront. Dès lors ceci explique que, en considérant les coefficients comme des paramètres quelconques et les congruences comme des équations, on ait défini un groupe fini continu.

Je vais donner maintenant quelques exemples.

15. Commençons par le groupe G^1_{pq},

$$(a^p = b^q = 1,\ ab = ba^\alpha),$$

p et q sont premiers, p est plus grand que q, α appartient à l'exposant q (mod p).

On a

$$a^x b^y a^\lambda b^\mu = a^{x+\lambda\alpha^{-y}} b^{y+\mu}.$$

D'où il suit qu'à l'opération $a^\lambda b^\mu$ correspond la transformation

$$\begin{aligned} x' &\equiv x + \lambda\alpha^{-y} \qquad (\text{mod}\, p) \\ y' &\equiv y + \mu \qquad (\text{mod}\, q). \end{aligned}$$

Les isomorphismes sont donnés par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a^\lambda & a^\mu b \end{pmatrix} = J_{\lambda\mu}.$$

$J_{\lambda\mu}$ change $a^x b^y$ en

$$a^{\lambda x + \mu\alpha \frac{1-\alpha^{-y}}{\alpha-1}} b^y.$$

A l'isomorphisme $J_{\lambda\mu}$ correspond la transformation

$$\lambda' \equiv \lambda x + \mu \frac{1 - \alpha^{-y}}{1 - \alpha^{-1}} \qquad (\bmod p)$$
$$y' \equiv y \qquad (\bmod q).$$

Voici maintenant les groupes finis continus correspondants :

α désignant une constante fixe quelconque, λ et μ étant deux paramètres, le premier groupe sera défini par

$$x' = x + \lambda \alpha^y$$
$$y' = y + \mu.$$

En effet, si

$$x'' = x' + \lambda' \alpha^{y'}, \qquad y'' = y' + \mu'$$

on trouve

$$x'' = x + \lambda'' \alpha^y, \qquad y'' = y + \mu''$$

avec

$$\lambda'' = \lambda + \lambda' \alpha^{\mu}, \qquad \mu'' = \mu + \mu'.$$

Le deuxième groupe sera défini par

$$x' = \lambda x + \mu \frac{1 - \alpha^y}{1 - \alpha}$$
$$y' = y.$$

Si l'on pose, en effet,

$$x'' = \lambda' x' + \mu' \frac{1 - \alpha^{y'}}{1 - \alpha} = \lambda'' x + \mu'' \frac{1 - \alpha^y}{1 - \alpha}$$
$$y'' = y' = y,$$

on a

$$\lambda'' = \lambda\lambda', \qquad \mu'' = \lambda' \mu + \mu'.$$

16. Soit maintenant le groupe $G^2_{p^3}$ ($a^p = b^p = \mathfrak{z}^p = 1$, $ab = ba\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}$ désignant une opération conjuguée d'elle-même).

On a

$$a^x b^y \mathfrak{z}^z a^\alpha b^\beta \mathfrak{z}^\gamma = a^{x+\alpha} b^{y+\beta} \mathfrak{z}^{z+\gamma-\alpha y}.$$

Le groupe fini continu correspondant à cette loi de multi-

plication est défini par les équations

$$x' = x + \alpha$$
$$y' = y + \beta$$
$$z' = z + \gamma - \alpha y.$$

Et, si l'on pose

$$x'' = x' + \alpha', \qquad y'' = y' + \beta', \qquad z'' = z' + \gamma' - \alpha' y',$$

puis

$$x'' = x + \alpha'', \qquad y'' = y + \beta'', \qquad z'' = z + \gamma'' - \alpha'' y,$$

il vient

$$\alpha'' = \alpha + \alpha', \qquad \beta'' = \beta + \beta', \qquad \gamma'' = \gamma + \gamma' - \alpha' \beta.$$

Mais cherchons les groupes des isomorphismes de $G^1_{p^3}$ et de $G^2_{p^3}$.

Si l'on part des équations de définition

$$a^p = \mathfrak{z}^y, \qquad b^p = \mathfrak{z}^x, \qquad ab = ba\mathfrak{z}^w, \qquad \mathfrak{z}^p = 1, \qquad a\mathfrak{z} = \mathfrak{z}a,$$
$$b\mathfrak{z} = \mathfrak{z}b,$$

et l'on pose

$$\bar{a} = a^\alpha b^\beta \mathfrak{z}^\gamma$$
$$\bar{b} = a^\delta b^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta$$
$$\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}^\eta,$$

avec

$$\eta(\alpha\varepsilon - \beta\delta) \not\equiv 0 \qquad (\text{mod}\, p),$$

en écrivant que l'on a

$$\bar{a}^p = \bar{\mathfrak{z}}^{\bar{y}}, \qquad \bar{b}^p = \bar{\mathfrak{z}}^{\bar{x}}, \qquad \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}\bar{\mathfrak{z}}^{\bar{w}},$$

on trouve

$$\eta\bar{y} \equiv \beta x + \alpha y + \alpha\beta w \frac{p(p+1)}{2}$$
$$\eta\bar{x} \equiv \varepsilon x + \delta y + \varepsilon\delta w \frac{p(p-1)}{2} \qquad (\text{mod}\, p)$$
$$\eta\bar{w} \equiv w(\alpha\varepsilon - \beta\delta).$$

Nous supposerons $p > 2$. Pour $G^1_{p^3}$, faisons

$$y = \bar{y} = 1, \qquad x = \bar{x} = 0, \qquad w = \bar{w} = 1.$$

Il vient

$$\eta = \alpha, \qquad \delta = 0, \qquad \alpha\varepsilon \equiv \eta, \qquad \text{donc} \qquad \varepsilon \equiv 1.$$

Les isomorphismes sont donnés par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b & \mathfrak{z} \\ a^\alpha b^\beta \mathfrak{z}^\gamma & b\mathfrak{z}^\zeta & \mathfrak{z}^\alpha \end{pmatrix}.$$

Un tel isomorphisme change $a^x b^y \mathfrak{z}^z$ en

$$a^{\alpha x} b^{\beta x + y} \mathfrak{z}^{\gamma x + \zeta y + \alpha z - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}}.$$

Assurons-nous que les équations

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x \\ y' &= \beta x + y \\ z' &= \gamma x + \zeta y + \alpha z - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

définissent bien un groupe fini continu de quatrième espèce.

Pour cela posons

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha' x' = \alpha'' x \\ y'' &= \beta' x' + y' = \beta'' x + y \\ z'' &= \gamma' x' + \zeta' y' + \alpha' z' - \alpha'\beta' \frac{x'(x'-1)}{2} \\ &= \gamma'' x + \zeta'' y + \alpha'' z - \alpha''\beta'' \frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' \\ \beta'' &= \alpha\beta' + \beta \\ \gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\zeta' + \gamma\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'\beta' \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \\ \zeta'' &= \zeta' + \alpha'\zeta. \end{aligned}$$

Pour $G^2_{p^3}$ $(p > 2)$, on a

$$x = \overline{x} = 0, \qquad y = \overline{y} = 0, \qquad w = \overline{w} = 1,$$

donc

$$\eta \equiv \alpha\varepsilon - \beta\delta \qquad (\operatorname{mod} p).$$

Les isomorphismes sont donnés par la formule

$$\begin{pmatrix} a & b & \mathfrak{J} \\ a^\alpha b^\beta \mathfrak{J}^\gamma & a^\delta b^\varepsilon \mathfrak{J}^\zeta & \mathfrak{J}^{\alpha\varepsilon-\beta\delta} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha\varepsilon - \beta\delta \not\equiv 0 \quad (\operatorname{mod} p).$$

Un tel isomorphisme change $a^x b^y \mathfrak{J}^z$ en

$$a^{\alpha x+\delta y} b^{\beta x+\varepsilon y} \mathfrak{J}^{\gamma x+\zeta y+(\alpha\varepsilon-\beta\delta)z-\alpha\beta\frac{x(x-1)}{2}-\delta\varepsilon\frac{y(y-1)}{2}-\beta\delta yx}.$$

De là, le groupe fini continu

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \delta y \\ y' &= \beta x + \varepsilon y \\ z' &= \gamma x + \zeta y + (\alpha\varepsilon - \beta\delta) z - \alpha\beta\frac{x(x-1)}{2} - \delta\varepsilon\frac{y(y-1)}{2} - \beta\delta xy \end{aligned}$$

et le groupe correspondant des paramètres

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' + \beta\delta', \\ \beta'' &= \alpha\beta' + \beta\varepsilon', \\ \delta'' &= \delta\alpha' + \varepsilon\delta', \\ \varepsilon'' &= \beta'\delta + \varepsilon\varepsilon', \\ \gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\zeta' + \gamma(\alpha'\varepsilon' - \beta'\delta') - \alpha\beta\beta'\delta' - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1)\delta'\varepsilon', \\ \zeta'' &= \delta\gamma' + \varepsilon\zeta' + \zeta(\alpha'\varepsilon' - \beta'\delta') - \delta\varepsilon\beta'\delta' - \tfrac{1}{2}\delta(\delta-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)\delta'\varepsilon'. \end{aligned}$$

17. Appliquons encore notre méthode à quelques groupes d'ordre p^4.

Partons des équations

$$b^p = \mathfrak{J}^u \theta^y, \qquad c^p = \mathfrak{J}^t \theta^x, \qquad bc = cb\theta^w \mathfrak{J}^s, \qquad \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,$$
$$w \not\equiv 0.$$

Posons

$$\bar{b} = b^{\alpha} c^{\beta} \mathfrak{J}^{\gamma} \theta^{\delta},$$
$$\bar{c} = b^{\varepsilon} c^{\zeta} \mathfrak{J}^{\eta} \theta^{\iota},$$
$$\bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}^{\varkappa} \theta^{\lambda},$$
$$\bar{\theta} = \mathfrak{J}^{\mu} \theta^{\nu},$$

avec $(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)(\varkappa\nu - \lambda\mu) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Écrivons que l'on a

$$\bar{b}^p = \bar{\mathfrak{J}}^{\bar{u}} \bar{\theta}^{\bar{y}}, \qquad \bar{c}^p = \bar{\mathfrak{J}}^{\bar{t}} \bar{\theta}^{\bar{x}}, \qquad \bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{b}\bar{\theta}^{\bar{w}} \bar{\mathfrak{J}}^{\bar{s}}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\varkappa\bar{u} + \mu\bar{y} \equiv \alpha u + \beta t,\\
&\lambda\bar{u} + \nu\bar{y} \equiv \alpha y + \beta x,\\
&\varkappa\bar{t} + \mu\bar{x} \equiv \zeta x + \varepsilon y \qquad \pmod{p}.\\
&\nu\bar{w} + \lambda\bar{s} \equiv w(\alpha\zeta - \beta\varepsilon)\\
&\mu\bar{w} + \varkappa\bar{s} \equiv s\ (\alpha\zeta - \beta\varepsilon)
\end{aligned}$$

Pour le groupe $G^{1}_{p^4}$,

$$b^p = \mathfrak{J}, \qquad c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \qquad bc = cb\theta$$

($\mathfrak{J}$ et θ étant des opérations conjuguées d'elles-mêmes), faisons

$$u = \bar{u} = 1, \qquad y = \bar{y} = 0, \qquad t = \bar{t} = 0, \qquad x = \bar{x} = 0,$$
$$w = \bar{w} = 1, \qquad s = \bar{s} = 0.$$

On trouve

$$\varkappa \equiv \alpha, \qquad \lambda \equiv 0, \qquad \varepsilon \equiv 0, \qquad \nu \equiv \alpha\zeta, \qquad \mu \equiv 0,$$

d'où l'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} b & c & \mathfrak{J} & \theta \\ b^{\alpha} c^{\beta} \mathfrak{J}^{\gamma} \theta^{\delta} & c^{\zeta} \mathfrak{J}^{\eta} \theta^{\iota} & \mathfrak{J}^{\alpha} & \theta^{\alpha\zeta} \end{pmatrix}$$

qui remplace

$$b^x c^y \mathfrak{J}^z \theta^t \quad \text{par} \quad b^{\alpha x} c^{\beta x + \zeta y} \mathfrak{J}^{\gamma x + \eta y + \alpha z} \theta^{\delta x + \iota y + \alpha\zeta t - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}}.$$

Voici le groupe fini continu correspondant

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha x,\\
y' &= \beta x + \zeta y,\\
z' &= \gamma x + \eta y + \alpha z,\\
t' &= \delta x + \iota y + \alpha\zeta t - \alpha\beta\frac{x(x-1)}{2}
\end{aligned}$$

et le groupe des paramètres

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \alpha\alpha',\\
\beta'' &= \beta'\alpha + \zeta'\beta,\\
\zeta'' &= \zeta\zeta',\\
\gamma'' &= \alpha\gamma' + \beta\eta' + \gamma\alpha',\\
\eta'' &= \eta'\zeta + \alpha'\eta,\\
\delta'' &= \delta'\alpha + \iota'\beta + \delta\alpha'\zeta' - \alpha'\beta'\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1),\\
\iota'' &= \zeta\iota' + \iota\alpha'.
\end{aligned}$$

Maintenant le groupe $G^2_{p^2}$ est défini par les équations

$$b^p = \mathfrak{I}, \qquad c^p = \theta, \qquad \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \qquad bc = cb\theta$$

(les opérations $\mathfrak{I}$ et θ sont conjuguées d'elles-mêmes).

Faisons, dans les congruences précédentes,

$$u = \bar{u} = 1, \qquad y = \bar{y} = 0, \qquad t = \bar{t} = 0, \qquad x = \bar{x} = 1,$$
$$w = \bar{w} = 1, \qquad s = \bar{s} = 0.$$

Il vient

$$\varkappa \equiv \alpha \equiv 1, \qquad \lambda \equiv \beta, \qquad \mu \equiv 0, \qquad \varepsilon \equiv 0, \qquad \nu \equiv \zeta.$$

De là l'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} b & c & \mathfrak{I} & \theta \\ bc^{\beta}\mathfrak{I}^{\gamma}\theta^{\delta} & c^{\zeta}\mathfrak{I}^{\eta}\theta^{\iota} & \mathfrak{I}\theta^{\beta} & \theta^{\zeta} \end{pmatrix}$$

qui change

$$b^x c^y \mathfrak{I}^z \theta^t \quad \text{en} \quad b^x c^{\beta x + \zeta y} \mathfrak{I}^{\gamma x + \eta y + z} \theta^{\delta x + \iota y + \beta z + \zeta t - \beta\frac{x(x-1)}{2}},$$

et le groupe fini continu

$$\begin{aligned}
x' &= x,\\
y' &= \beta x + \zeta y,\\
z' &= \gamma x + \eta y + z,\\
t' &= \delta x + \iota y + \beta z + \zeta t - \beta\frac{x(x-1)}{2},
\end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned}
\beta'' &= \beta' + \beta\zeta',\\
\zeta'' &= \zeta\zeta',\\
\gamma'' &= \gamma' + \beta\eta' + \gamma,\\
\eta'' &= \zeta\eta' + \eta,\\
\delta'' &= \delta' + \beta\iota' + \gamma\beta' + \delta\zeta',\\
\iota'' &= \iota'\zeta + \beta'\eta + \zeta'\iota.
\end{aligned}$$

18. Partons maintenant des équations

$$a^p = \theta^x, \qquad b^p = \theta^y, \qquad \theta^{p^2} = 1, \qquad ab = ba\theta^p.$$

Posons

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= a^\alpha b^\beta \theta^\gamma,\\
\bar{b} &= a^\delta b^\varepsilon \theta^\zeta,\\
\bar{\theta} &= \theta^\eta,
\end{aligned}$$

avec $\eta(\alpha\varepsilon - \beta\delta) \not\equiv 0 \pmod p$.

Ici l'on a

$$\begin{aligned}
\eta &\equiv \alpha\varepsilon - \beta\delta && \pmod p,\\
\eta\bar{x} &\equiv \alpha x + \beta y + \gamma p && \pmod{p^2}.\\
\eta\bar{y} &\equiv \delta x + \varepsilon y + \zeta p &&
\end{aligned}$$

Pour le groupe $G^3_{p^2}$,

$$(a^p = b^p = \theta^{p^2} = 1,\ ab = ba\theta^p),$$

il faut supposer

$$x = y = \bar{x} = \bar{y} = 0,$$

de sorte que γ et ζ sont nuls $(\bmod p)$.

De là les isomorphismes

$$\begin{pmatrix} a & b & \theta \\ a^{\alpha} b^{\beta} \theta^{\gamma p}, & a^{\delta} b^{\varepsilon} \theta^{\zeta p} & \theta^{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha\varepsilon - \beta\delta \not\equiv 0$;

$$a^x b^y \theta^z$$

devient

$$a^{\alpha x + \delta y} b^{\beta x + \varepsilon y} \theta^{\left(\gamma x + \zeta y - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2} - \delta\varepsilon \frac{y(y-1)}{2} - \beta\delta xy\right) p + (\alpha\varepsilon - \beta\delta) z}.$$

On en déduit la transformation

$$\begin{aligned} x' &\equiv \alpha x + \delta y \\ y' &\equiv \beta x + \varepsilon y \end{aligned} \quad (\text{mod } p),$$

$$z' \equiv \left(\gamma x + \zeta y - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2} - \delta\varepsilon \frac{y(y-1)}{2} - \beta\delta xy\right) p + (\alpha\varepsilon - \beta\delta) z \quad (\text{mod } p^2).$$

Pour le groupe fini continu correspondant, nous prendrons les équations de définition que voici :

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \delta y, \\ y' &= \beta x + \varepsilon y, \\ z' &= \gamma x + \zeta y - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2} - \delta\varepsilon \frac{y(y-1)}{2} - \beta\delta xy + (\alpha\varepsilon - \beta\delta) z, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha' + \beta\delta', \\ \beta'' &= \alpha\beta' + \beta\varepsilon', \\ \delta'' &= \delta\alpha' + \varepsilon\delta', \\ \varepsilon'' &= \delta\beta' + \varepsilon\varepsilon', \\ \gamma'' &= \gamma'\alpha + \zeta'\beta - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1)\delta'\varepsilon' + \gamma(\alpha'\varepsilon' - \beta'\delta') - \alpha\beta\beta'\delta', \\ \zeta'' &= \gamma'\delta + \zeta'\varepsilon - \tfrac{1}{2}\delta(\delta-1)\alpha'\beta' - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)\delta'\varepsilon' + \zeta(\alpha'\varepsilon' - \beta'\delta') - \delta\varepsilon\beta'\delta'. \end{aligned}$$

Si, au contraire, on fait dans les congruences précédentes,

$$x = \bar{x} = 1, \qquad y = \bar{y} = 0$$

(Groupe $G^1_{p^4}$, $a^p = \theta$, $b^p = \theta^{p^2} = 1$, $ab = ba\theta^p$), on a

$$\alpha \equiv \eta \pmod p, \quad \delta \equiv 0 \pmod p, \quad \varepsilon \equiv 1 \pmod p,$$

d'où, en posant $a^p = \theta$, $\theta^p = \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^p = 1$, l'isomorphisme

$$\begin{pmatrix} a & b & \theta & \mathfrak{J} \\ a^\alpha b^\beta \theta^\gamma \mathfrak{J}^\delta & b\mathfrak{J}^\lambda & \theta^\alpha \mathfrak{J}^\gamma & \mathfrak{J}^\alpha \end{pmatrix}.$$

Il transforme

$$a^x b^y \theta^z \mathfrak{J}^t \quad \text{en} \quad a^{\alpha x} b^{y+\beta x} \theta^{\gamma x + \alpha z} \mathfrak{J}^{\delta x + \lambda y + \gamma z + \alpha t - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}}.$$

Le groupe fini continu correspondant est défini par les équations

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x, \\ y' &= y + \beta x, \\ z' &= \gamma x + \alpha z, \\ t' &= \delta x + \lambda y + \gamma z + \alpha t - \alpha\beta \frac{x(x-1)}{2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \alpha\alpha', \\ \beta'' &= \beta + \alpha\beta', \\ \gamma'' &= \alpha\gamma' + \gamma\alpha', \\ \delta'' &= \delta'\alpha + \lambda'\beta + \gamma'\gamma + \alpha'\delta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\alpha'\beta', \\ \lambda'' &= \lambda' + \lambda\alpha'. \end{aligned}$$

19. Soit, maintenant, pour finir,

$$a^p = 1, \quad b^p = \mathfrak{J}^u, \quad c^p = \mathfrak{J}^t, \quad bc = cba, \quad ab = ba\mathfrak{J}^r,$$
$$ac = ca\mathfrak{J}^q, \quad \mathfrak{J}^\alpha = 1.$$

Posons

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a^\alpha \mathfrak{J}^\beta, \\ \bar{b} &= a^\gamma b^\delta c^\varepsilon \mathfrak{J}^\zeta, \\ \bar{c} &= a^\eta b^\theta c^\iota \mathfrak{J}^\varkappa, \\ \bar{\mathfrak{J}} &= \mathfrak{J}^\lambda \end{aligned}$$

avec $\lambda\alpha(\delta\iota - \varepsilon\theta) \not\equiv 0 \pmod p$.

En exprimant que l'on a

$$\bar{a}^p = 1, \qquad \bar{b}^p = \bar{\mathfrak{z}}^{\bar{u}}, \qquad \bar{c}^p = \bar{\mathfrak{z}}^{\bar{t}},$$
$$\bar{b}\bar{c} = \bar{c}\bar{b}\bar{a}, \qquad \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}\bar{\mathfrak{z}}^{\bar{r}}, \qquad \bar{a}\bar{c} = \bar{c}\bar{a}\bar{\mathfrak{z}}^{\bar{q}},$$

il vient

$$\lambda\bar{u} \equiv t\varepsilon + u\delta,$$
$$\lambda\bar{t} \equiv t\iota + u\theta,$$
$$\alpha \equiv \delta\iota - \theta\varepsilon,$$
$$\beta \equiv q\varepsilon\alpha + q\gamma\iota + q\eta\varepsilon + r(\gamma\theta - \delta\eta) - \theta q\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2}$$
$$-\varepsilon r\frac{\theta(\theta-1)}{2} + \delta q\frac{\iota(\iota-1)}{2} + \iota r\frac{\delta(\delta-1)}{2} + q(\alpha - \delta\iota - \theta\varepsilon),$$
$$\lambda\bar{r} \equiv \alpha(q\varepsilon + r\delta),$$
$$\lambda\bar{q} \equiv \alpha(q\iota + r\theta),$$

tout cela (mod p).

Pour le groupe $G^5_{p^4}$

$$a^p = b^p = c^p = \mathfrak{z}^p = 1, \qquad bc = cba, \qquad ab = ba\mathfrak{z}, \qquad ac = ca,$$

faisons

$$\bar{u} = u = 0, \qquad \bar{t} = t = 0, \qquad \bar{r} = r = 1, \qquad \bar{q} = q = 0;$$

il vient

$$\theta = 0, \qquad \alpha \equiv \delta\iota, \qquad \beta \equiv \iota\frac{\delta(\delta-1)}{2} - \delta\eta, \qquad \lambda \equiv \delta^2\iota.$$

Les isomorphismes de $G^5_{p^4}$ sont, par suite, donnés par l'expression

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \mathfrak{z} \\ a^{\delta\iota}\mathfrak{z}^{\iota\frac{\delta(\delta-1)}{2} - \delta\eta} & a^\gamma b^\delta c^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta & a^\eta c^\iota \mathfrak{z}^\alpha & \mathfrak{z}^{\delta^2\iota} \end{pmatrix}.$$

Le groupe fini continu correspondant est, en changeant les notations (j'ai mis α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ à la place

de γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, $\varkappa$) :

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta\eta x + \alpha y + \varepsilon z - \beta\gamma\frac{y(y-1)}{2},\\
y' &= \beta y,\\
z' &= \gamma y + \eta z,\\
t' &= \eta x\frac{\beta(\beta-1)}{2} - \beta\varepsilon x + \delta y + \theta z + \beta^2\eta t\\
&\quad + \alpha\beta\frac{y(y+1)}{2} + \frac{1}{3}\beta^2\gamma y(y^2-1) - \gamma y\frac{\beta y(\beta y-1)}{2}\\
&\quad + \gamma\frac{y(y+1)}{2}\,\frac{\beta(\beta-1)}{2} - \alpha\beta y^2 - \beta\varepsilon yz + \beta^2\gamma\frac{y^2(y-1)}{2},
\end{aligned}
$$

et il donne

$$
\begin{aligned}
\beta'' &= \beta\beta',\\
\gamma'' &= \beta\gamma' + \gamma\eta',\\
\eta'' &= \eta\eta',\\
\alpha'' &= \beta\alpha' + \beta'\eta'\alpha + \gamma\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\beta'\gamma'\beta(\beta-1),\\
\varepsilon'' &= \varepsilon'\eta + \varepsilon\beta'\eta',\\
\theta'' &= \tfrac{1}{2}\varepsilon\beta'\eta'(\beta'-1) - \beta'\varepsilon\varepsilon' + \theta'\eta + \beta'^2\eta'\theta,\\
\delta'' &= \tfrac{1}{2}\alpha\eta'\beta'(\beta'-1) - \tfrac{1}{2}\alpha\eta'\beta\beta'^2 - \alpha\beta'\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\alpha'\beta^2\beta' + \tfrac{1}{4}\beta\gamma\eta'\beta'(\beta'-1)\\
&\quad + \tfrac{1}{4}\beta\beta'^2\gamma'\beta(\beta-1) + \tfrac{1}{3}\beta^2\beta'^2(\beta\gamma' + \gamma\eta') - \beta\gamma\beta'\varepsilon' + \gamma\theta'\\
&\quad + \beta'^2\eta'[\delta + \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{3}\beta^2\gamma - \tfrac{1}{4}\beta\gamma(\beta-1)]\\
&\quad + \beta[\delta' + \tfrac{1}{2}\alpha'\beta' - \tfrac{1}{3}\beta'^2\gamma' - \tfrac{1}{4}\beta'\gamma'(\beta'-1)].
\end{aligned}
$$

Pour le groupe $G^6_{p^4}$

$$a^p = c^p = \mathfrak{I}^p = 1, \qquad b^p = \mathfrak{I}, \qquad bc = cba, \qquad ab = ba\mathfrak{I}, \qquad ac = ca$$

il faut, dans les congruences précédentes, poser

$$u = \bar{u} = 1, \qquad t = \bar{t} = 0, \qquad r = \bar{r} = 1, \qquad q = \bar{q} = 0;$$

il vient

$$\lambda \equiv \delta, \qquad \iota \equiv \frac{1}{\delta}, \qquad \theta \equiv 0, \qquad \alpha \equiv 1, \qquad \beta \equiv -\delta\eta + \frac{1}{2}(\delta - 1).$$

Les isomorphismes sont donnés par l'expression

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \mathfrak{z} \\ a\mathfrak{z}^{-\delta\eta+\frac{1}{2}(\delta-1)} & a^{\gamma}b^{\delta}c^{\varepsilon}\mathfrak{z}^{\zeta} & a^{\eta}c^{\frac{1}{\delta}}\mathfrak{z}^{\varkappa} & \mathfrak{z}^{\delta} \end{pmatrix}.$$

Remplaçons γ, δ, ε, ζ, η, $\varkappa$, par α, β, γ, δ, ε, ζ.

On trouve, pour le groupe fini correspondant, les équations de définition que voici :

$$x' = x + \alpha y + \varepsilon z - \beta\gamma\frac{y(y-1)}{2},$$

$$y' = \beta y,$$

$$z' = \gamma y + \frac{z}{\beta},$$

$$t' = -\beta\varepsilon x + \frac{x}{2}(\beta-1) + \delta y + \zeta z + \beta t$$
$$+ \beta^2\gamma\frac{y(y^2-1)}{3} - \frac{\beta(\beta-1)}{2}\gamma\frac{y(y-1)}{2} - \alpha\beta\frac{y(y-1)}{2},$$

qui donnent

$$\beta'' = \beta\beta',$$

$$\gamma'' = \beta\gamma' + \frac{\gamma}{\beta'},$$

$$\alpha'' = \alpha + \beta\alpha' + \gamma\varepsilon' + \beta'\gamma'\frac{\beta(\beta-1)}{2},$$

$$\varepsilon'' = \varepsilon + \frac{\varepsilon'}{\beta},$$

$$\delta'' = \frac{1}{3}\beta^2\beta'^2\left(\beta\gamma' + \frac{\gamma}{\beta'}\right) - \frac{1}{4}\beta\beta'(\beta\beta'-1)\left(\beta\gamma' + \frac{\gamma}{\beta'}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\beta\beta'\left[\alpha + \beta\alpha' + \gamma\varepsilon' - \beta'\gamma'\frac{\beta(\beta-1)}{2}\right] - \beta'\varepsilon'\alpha - \frac{1}{2}\beta\beta'\varepsilon'$$
$$+ \frac{1}{2}\alpha(\beta'-1) + \frac{1}{4}(\beta'-1)\beta\gamma + \beta\delta' + \gamma\zeta' + \delta\beta' - \frac{1}{3}\beta'\beta^2\gamma$$
$$+ \frac{1}{4}\beta\beta'(\beta-1) + \frac{1}{2}\alpha\beta\beta' - \frac{1}{3}\beta'^2\gamma'\beta + \frac{1}{4}\beta\beta'\gamma'(\beta'-1) + \frac{1}{2}\beta\beta'\alpha',$$

$$\zeta'' = -\varepsilon\varepsilon'\beta' + \frac{1}{2}\varepsilon(\beta'-1) + \frac{\zeta'}{\beta} + \zeta\beta'.$$

Prenons enfin le groupe $G_{p^4}^7$

$$a^p = c^p = \mathfrak{z}^p = 1, \qquad b^p = \mathfrak{z}, \qquad bc = cba, \qquad ab = ba, \qquad ac = ca\mathfrak{z}.$$

Il faut, dans les congruences précédentes, faire les hypothèses suivantes :

$$u = \bar{u} = 1, \qquad t = \bar{t} = 0, \qquad r = \bar{r} = 0, \qquad q = \bar{q} = 1.$$

On trouve

$$\lambda \equiv \delta, \qquad \alpha \equiv \delta\iota, \qquad \theta \equiv 0, \qquad \varepsilon \equiv 0, \qquad \iota^2 \equiv 1, \qquad \beta \equiv \gamma\iota + \frac{\delta}{2}(1 - \iota).$$

Changeons γ, δ, ζ, η, ι, $\varkappa$ en α, β, γ, δ, ε, ζ.

L'isomorphisme général a pour expression

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \mathfrak{z} \\ a^{\beta\varepsilon}\mathfrak{z}^{\alpha\varepsilon + \frac{\beta}{2}(1-\varepsilon)} & a^{\alpha} b^{\beta}\mathfrak{z}^{\gamma} & a^{\delta} c^{\varepsilon}\mathfrak{z}^{\zeta} & \mathfrak{z}^{\beta} \end{pmatrix}.$$

Il donne le groupe fini continu à 5 paramètres que voici :

$$\begin{aligned}
x' &= \beta\varepsilon x + \alpha y + \delta z, \\
y' &= \beta y, \\
z' &= \varepsilon z, \\
t' &= \left[\alpha\varepsilon + \frac{\beta}{2}(1 - \varepsilon)\right] x + \gamma y + \zeta z + \beta t - \delta\varepsilon \frac{z(z-1)}{2},
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon^2 = 1$, d'où je déduis

$$\begin{aligned}
\beta'' &= \beta\beta, \\
\varepsilon'' &= \varepsilon\varepsilon' \qquad (\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = \varepsilon''^2 = 1), \\
\alpha'' &= \alpha\beta'\varepsilon' + \beta\alpha', \\
\delta'' &= \delta\beta'\varepsilon' + \varepsilon\delta', \\
\gamma'' &= \alpha\left[\alpha'\varepsilon' + \frac{\beta'}{2}(1 - \varepsilon')\right] + \beta\gamma' + \gamma\beta', \\
\zeta'' &= \delta\left[\alpha'\varepsilon' + \frac{\beta'}{2}(1 - \varepsilon')\right] + \varepsilon\zeta' + \zeta\beta' + \frac{1}{2}\delta'\varepsilon'(\varepsilon - 1).
\end{aligned}$$

CHAPITRE III.

SUR LES GROUPES D'ORDRE 2^5.

20. Plusieurs auteurs (MM. Bagnéra, Miller) se sont occupés de l'énumération des groupes d'ordre p^5. Je la considère comme acquise. Je ferai simplement quelques remarques sur les groupes obtenus.

Prenons d'abord les groupes d'ordre 32 :

a. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{J},\ \mathfrak{J}^8 = b^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{J}^4,\ a\mathfrak{J} = \mathfrak{J}a,\ b\mathfrak{J} = \mathfrak{J}b),$$

a

16	opérations	d'ordre	16
8	»	»	8
4	»	»	4
3	»	»	2

Le groupe des isomorphismes cogrédients est d'ordre 4. Les isomorphismes qui l'engendrent sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^{\lambda} b \\ a^{\lambda+8} b \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^{2\lambda+1} b^{\mu} \\ a^{2\lambda+9} b^{\mu} \end{pmatrix}.$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$a = \prod_{h=1}^{2} (x_{h,1}\, x_{h,2} \ldots x_{h,16}), \qquad b = \prod_{k=1}^{16} (x_{1,k}\, x_{2,9k-8}).$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\}, \qquad F_3 = \{a^2, b\}.$$

Ces 3 faisceaux d'ordre 16 ont en commun le sous-groupe conjugué de lui-même, d'ordre 8,

$$\{\mathfrak{I}\}.$$

21. *b*. Le groupe $(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ \mathfrak{I}^4 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta)$ ($\mathfrak{I}$ et θ étant des opérations conjuguées d'elles-mêmes), a

16	opérations	d'ordre	8
12	»	»	4
3	»	»	2

Les isomorphismes cogrédients sont donnés par

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} b^\lambda a^\mu \\ b^{-\lambda} a^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} b^\lambda a^\mu \\ b^{\lambda+1-(-1)} a^\mu \end{pmatrix}.$$

Leur groupe est d'ordre 4.

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}\}.$$

Ils ont en commun le sous-groupe conjugué de lui-même d'ordre 8,

$$\{\mathfrak{I}, \theta\}.$$

Les opérations génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{k=1}^{8} (x_{h1} x_{h2} x_{h3} x_{h4}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1,k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2} x_{5,k} x_{6,3k-2} x_{7,k} x_{8,3k-2}).$$

22. *c*. Le groupe $(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \mathfrak{I}^4 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta)$ [1] a 16 opérations d'ordre 8, 8 d'ordre 4, 7 d'ordre 2.

---

[1] Une fois pour toutes, les opérations désignées par les lettres θ, $\mathfrak{I}$, ... sont conjuguées d'elles-mêmes.

Le groupe régulier correspondant est engendré par les opérations

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1}\, x_{h2} \ldots x_{h8}), \qquad \theta = \prod_{k=1}^{8} (x_{1k} x_{2k})(x_{3k} x_{4k}),$$

$$\begin{aligned} b = {} & (x_{11} x_{31})(x_{12} x_{42})(x_{13} x_{33})(x_{14} x_{44}) \\ & \times (x_{15} x_{35})(x_{16} x_{46})(x_{17} x_{47})(x_{18} x_{48})(x_{21} x_{41}) \\ & \times (x_{22} x_{32})(x_{23} x_{43})(x_{24} x_{34})(x_{25} x_{45})(x_{26} x_{36})(x_{27} x_{47})(x_{28} x_{38}). \end{aligned}$$

Les isomorphismes cogrédients sont engendrés par

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^{\mu+1} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a b^\beta \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ a b^\beta \mathfrak{J}^\lambda \theta^{\mu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Leur groupe est d'ordre 4.

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{J}, \theta\}.$$

Ils ont en commun le sous-groupe d'ordre 8 conjugué de lui-même

$$\{\mathfrak{J}, \theta\}.$$

23. *d*. Le groupe ($a^2 = \mathfrak{J}$, $b^2 = \theta$, $\mathfrak{J}^4 = \theta^2 = 1$, $ab = ba\mathfrak{J}^2$) a 16 opérations d'ordre 8, 6 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8}), \qquad b = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k}\, x_{2,5k-4}\, x_{3,k}\, x_{4,5k-4}).$$

Le groupe associé (groupe des isomorphismes cogrédients) est engendré par

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{J}^{\lambda+2} \theta^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a b^\beta \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ a b^\beta \mathfrak{J}^{\lambda+2} \theta^\mu \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16

$$F_1 = \{a, \theta\} \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{J}\}.$$

Ils ont en commun le sous-groupe conjugué de lui-même d'ordre 8,

$$\{\mathfrak{J}, \theta\}.$$

24. *e*. Le groupe $(a^2 = \mathfrak{J}, b^4 = \mathfrak{J}^2, \mathfrak{J}^4 = 1, ba = ab^3\mathfrak{J}^2)$ a 24 opérations d'ordre 8, 4 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{k=1}^{4} (x_{k1} \ldots x_{k8})$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1k} x_{2,7k-6} x_{3,k} x_{4,7k-6} x_{1,k+4} x_{2,7k-2} x_{3,k+4} x_{4,7k-2}).$$

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, b^3\mathfrak{J}^2)(b^3, b\mathfrak{J}^2)(ab, ab^3\mathfrak{J}^2)(ab^3, ab\mathfrak{J}^2)\\ & \times (b^2, b^2\mathfrak{J}^2)(ab^2, ab^2\mathfrak{J}^2)(b\mathfrak{J}, b^3\mathfrak{J}^3)(b^3\mathfrak{J}, b\mathfrak{J}^3)\\ & \times (ab\mathfrak{J}, ab^3\mathfrak{J}^3)(ab^3\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}^3)(b^2\mathfrak{J}, b^2\mathfrak{J}^3)(ab^2\mathfrak{J}, ab^2\mathfrak{J}^3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, ab^2, a\mathfrak{J}^2, ab^2\mathfrak{J}^2)(ab, ab^3, ab\mathfrak{J}^2, ab^3\mathfrak{J}^2)\\ & \times (a\mathfrak{J}, ab^2\mathfrak{J}, a\mathfrak{J}^3, ab^2\mathfrak{J}^3)(ab\mathfrak{J}, ab^3\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}^3, ab^3\mathfrak{J}^3).\end{aligned}$$

Il y a 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\}, \qquad F_3 = \{ab^2\}, \qquad F_4 = \{ab^3\},$$

et un faisceau d'ordre 16

$$F = \{b, \mathfrak{J}\}.$$

25. *f*. Le groupe $(a^2 = \mathfrak{J}, b^4 = \theta, \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1, ba = ab^3\theta)$ a 8 opérations d'ordre 8, 20 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, b^3\theta)(b^2, b^2\theta)(ab, ab^3\theta)(ab^2, ab^2\theta)\\ & \times (ab^3, ab\theta)(b^3, b\theta)(b\mathfrak{J}, b^3\theta\mathfrak{J})(b^2\mathfrak{J}, b^2\mathfrak{J}\theta)\\ & \times (ab\mathfrak{J}, ab^3\mathfrak{J}\theta)(ab^2\mathfrak{J}, ab^2\mathfrak{J}\theta)(ab^3\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}\theta)(b^3\mathfrak{J}, b\mathfrak{J}\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, ab^2, a\theta, ab^2\theta)(ab, ab^3, ab\theta, ab^3\theta)\\ & \times (a\mathfrak{J}, ab^2\mathfrak{J}, a\mathfrak{J}\theta, ab^2\mathfrak{J}\theta)(ab\mathfrak{J}, ab^3\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}\theta, ab^3\mathfrak{J}\theta).\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe associé sont

$$b = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8}), \qquad a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k} x_{2,7k-6} x_{3,k} x_{4,7k-6}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{b, \mathfrak{I}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F_3 = \{ab^2, \theta\}, \qquad F_4 = \{ab^3, \theta\}.$$

26. *g*. Le groupe $(a^2 = \mathfrak{I},\ b^4 = \theta,\ \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ba = ab^3)$ a 8 opérations d'ordre 8, 20 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Son groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, b^3)(b^2, b^2\theta)(ab, ab^3)(ab^2, ab^2\theta) \\ & \times (b\theta, b^3\theta)(ab\theta, ab^3\theta)(b\mathfrak{I}, b^3\mathfrak{I})(b^2\mathfrak{I}, b^2\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (ab\mathfrak{I}, ab^3\mathfrak{I})(ab^2\mathfrak{I}, ab^2\mathfrak{I}\theta)(b\mathfrak{I}\theta, b^3\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}\theta, ab^3\mathfrak{I}\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, ab^2\theta, a\theta, ab^2)(ab, ab^3\theta, ab\theta, ab^3) \\ & \times (a\mathfrak{I}, ab^2\theta\mathfrak{I}, a\theta\mathfrak{I}, ab^2\mathfrak{I})(ba\mathfrak{I}, ab^3\theta\mathfrak{I}, ab\theta\mathfrak{I}, ab^3\mathfrak{I}).\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8}), \qquad a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2}).$$

On a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{b, \mathfrak{I}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_\alpha = \{ab^\alpha, \theta\} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3).$$

27. *h*. Le groupe

$$a^2 = \mathfrak{I}, \qquad b^2 = \mathfrak{I}', \qquad \mathfrak{I}^2 = \mathfrak{I}'^2 = \theta^2 = 1, \qquad ab = ba\theta$$

a 24 opérations d'ordre 4 et 7 d'ordre 2.

On prendra pour les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$a = \prod_{h=1}^{8} (x_{h1} x_{h2} x_{h3} x_{h4}),$$

$$\begin{aligned} b = \quad & (x_{11} x_{21} x_{31} x_{41})(x_{12} x_{51} x_{32} x_{61})(x_{22} x_{74} x_{42} x_{84})(x_{52} x_{71} x_{62} x_{81}) \\ & \times (x_{13} x_{23} x_{33} x_{43})(x_{24} x_{53} x_{34} x_{63})(x_{24} x_{72} x_{44} x_{82})(x_{54} x_{73} x_{64} x_{83}). \end{aligned}$$

Le groupe associé est d'ordre 4. Il est engendré par les isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{a} = \quad & (b, b\theta)(ab, ab\theta)(b\mathfrak{H}, b\mathfrak{H}\theta)(ab\mathfrak{H}, ab\mathfrak{H}\theta) \\ & \times (b\mathfrak{H}', b\theta\mathfrak{H}')(ab\mathfrak{H}', ab\mathfrak{H}'\theta)(b\mathfrak{H}\mathfrak{H}', b\mathfrak{H}\mathfrak{H}'\theta)(ab\mathfrak{H}\mathfrak{H}', ab\mathfrak{H}\mathfrak{H}'\theta), \\ \bar{b} = \quad & (a, a\theta)(ab, ab\theta)(a\mathfrak{H}, a\mathfrak{H}\theta)(ab\mathfrak{H}, ab\mathfrak{H}\theta) \\ & \times (a\mathfrak{H}', a\mathfrak{H}'\theta)(ab\mathfrak{H}', ab\mathfrak{H}'\theta)(a\mathfrak{H}\mathfrak{H}', a\mathfrak{H}\mathfrak{H}'\theta)(ab\mathfrak{H}\mathfrak{H}', ab\mathfrak{H}0\mathfrak{H}'). \end{aligned}$$

Il y a trois faisceaux

$$F_1 = \{a, \mathfrak{H}', \theta\}, \qquad F_2 = \{b, \mathfrak{H}, \theta\}, \qquad F_3 = \{ab, \mathfrak{H}, \mathfrak{H}'\}.$$

28. *i*. Le groupe

$$a^2 = \mathfrak{H}, \quad b^2 = c^2 = \mathfrak{H}^4 = 1, \quad ac = ca\mathfrak{H}^2, \quad bc = cb\mathfrak{H}^2, \quad ab = bac\mathfrak{H}^3$$

a 8 opérations d'ordre 8, 16 d'ordre 4, 7 d'ordre 2.

Le groupe associé est d'ordre 8. Il est engendré par

$$\begin{aligned} a = \quad & (b, bc\mathfrak{H})(ab, abc\mathfrak{H})(c, c\mathfrak{H}^2)(ac, ac\mathfrak{H}^2) \\ & \times (b\mathfrak{H}^2, bc\mathfrak{H}^3)(ab\mathfrak{H}^2, abc\mathfrak{H}^3)(b\mathfrak{H}, bc\mathfrak{H}^2) \\ & \times (ab\mathfrak{H}, abc\mathfrak{H}^2)(c\mathfrak{H}, c\mathfrak{H}^3)(ac\mathfrak{H}, ac\mathfrak{H}^3)(b\mathfrak{H}^3 bc)(ab\mathfrak{H}^3, abc), \\ \bar{b} = \quad & (a, ac\mathfrak{H}^3)(a\mathfrak{H}, ac)(a\mathfrak{H}^2, ac\mathfrak{H})(a\mathfrak{H}^3, ac\mathfrak{H}^2) \\ & \times (c, c\mathfrak{H}^2)(c\mathfrak{H}, c\mathfrak{H}^3)(ab, abc\mathfrak{H})(ab\mathfrak{H}, abc\mathfrak{H}^2) \\ & \times (ab\mathfrak{H}^2, abc\mathfrak{H}^3)(ab\mathfrak{H}^3, abc)(bc, bc\mathfrak{H}^2)(bc\mathfrak{H}, bc\mathfrak{H}^3), \\ \bar{c} = \quad & (a, a\mathfrak{H}^2)(a\mathfrak{H}, a\mathfrak{H}^3)(b, b\mathfrak{H}^2)(b\mathfrak{H}, b\mathfrak{H}^3) \\ & \times (ac, ac\mathfrak{H}^2)(ac\mathfrak{H}, ac\mathfrak{H}^3)(bc, bc\mathfrak{H}^2)(bc\mathfrak{H}, bc\mathfrak{H}^3). \end{aligned}$$

Les faisceaux sont

$$\{a\}, \quad \{ac\}, \quad \{b, \mathfrak{H}\}, \quad \{bc, \mathfrak{H}\}, \quad \{ab, \mathfrak{H}\}.$$

Voici les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16),$$
$$\times (17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 9)(2, 28)(3, 11)(4, 30)(5, 13)(6, 32)(7, 15)(8, 26)$$
$$\times (10, 24)(12, 18)(14, 20)(16, 22)(17, 25)(19, 27)(21, 29)(23, 31),$$

$$c = (1, 17)(2, 22)(3, 19)(4, 24)(5, 21)(6, 18)(7, 23)(8, 20)$$
$$\times (9, 29)(10, 26)(11, 31)(12, 28)(13, 25)(14, 30)(15, 27)(16, 32).$$

29. *j*. Le groupe

$$a^2 = \mathfrak{I}, \qquad b^4 = \theta, \qquad ba = ab^3\mathfrak{I}, \qquad \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1$$

a 8 opérations d'ordre 8, 20 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, d'ordre 8, est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = (b, b^3\mathfrak{I})(b^2, b^2\theta)(ab, ab^3\mathfrak{I})(ab^2, ab^2\theta)$$
$$\times (b\theta, b^3\mathfrak{I}\theta)(b^2\mathfrak{I}, b^2\mathfrak{I}\theta)(ab\theta, ab^3\mathfrak{I}\theta)(ab^2\mathfrak{I}, ab^2\mathfrak{I}\theta),$$

$$\bar{b} = (a, ab^2\mathfrak{I}\theta, a\theta, ab^2\mathfrak{I})(ab, ab^3\mathfrak{I}\theta, ab\theta, ab^3\mathfrak{I})$$
$$\times (ab^2, a\mathfrak{I}, ab^2\theta, a\mathfrak{I}\theta)(ab^3, ab\mathfrak{I}, ab^3\theta, ab\mathfrak{I}\theta).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{8} (x_{h1} \ldots x_{h8}),$$

$$a = (x_{11}x_{31}x_{21}x_{41})(x_{12}x_{44}x_{22}x_{34})(x_{13}x_{37}x_{23}x_{47})(x_{14}x_{42}x_{24}x_{32})$$
$$\times (x_{15}x_{35}x_{25}x_{45})(x_{16}x_{48}x_{26}x_{38})(x_{17}x_{33}x_{27}x_{43})(x_{18}x_{46}x_{28}x_{36}).$$

Enfin voici les faisceaux :

$$F\{b, \mathfrak{I}\} \qquad \text{(ordre 16)},$$

puis 4 faisceaux d'ordre 8,

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \mathfrak{I}\}, \qquad F_3 = \{ab^2, \theta\}, \qquad F_4 = \{ab^3, \mathfrak{I}\}.$$

30. *k*. Le groupe

$$(a^4 = b^2 = 0,\ c^2 = \theta^2 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = bac)$$

a 16 opérations d'ordre 8, 12 d'ordre 4, 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, qui est d'ordre 16, est engendré par les isomorphismes

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, bc, b\theta, bc\theta)(c, c\theta)(ab, abc, ab\theta, abc\theta)\\ & \times (ac, ac\theta)(a^2b, a^2bc, a^2b\theta, a^2bc\theta)(a^2c, a^2c\theta)\\ & \times (a^3b, a^3bc, a^2b\theta, a^3bc\theta)(a^3c, a^3c\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, ac)(a^2, a^2\theta)(a^3, a^3c\theta)(ab, abc)(a^2b, a^2b\theta)\\ & \times (a^3b, a^3bc\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^2bc, a^2bc\theta)(a\theta, ac\theta)(ab\theta, abc\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(ab, ab\theta)(a^3b, a^3b\theta)\\ & \times (ac, ac\theta)(a^3c, a^3c\theta)(abc, abc\theta)(a^3bc, a^3bc\theta).\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8})$$

et

$$\begin{aligned}b' = ab = {} & (x_{11}x_{21}x_{31}x_{41}x_{15}x_{25}x_{35}x_{45})(x_{12}x_{48}x_{36}x_{28}x_{16}x_{44}x_{32}x_{24})\\ & \times (x_{13}x_{27}x_{33}x_{47}x_{17}x_{23}x_{37}x_{43})(x_{14}x_{46}x_{38}x_{26}x_{18}x_{42}x_{34}x_{22}).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{gathered}ab' = b'^3a^7, \quad a^2b' = b'a^6, \quad a^3b' = b'^3a^5,\\ a^5b' = b'^3a^3, \quad a^6b' = b'a^2, \quad a^7b' = b'^3a,\\ ab'^2 = b'^2a^5, \quad a^3b'^2 = b'^2a^7, \quad a^5b'^2 = b'^2a, \quad a^7b'^2 = b'^2a^3,\\ ab'^3 = b'a^7, \quad a^2b'^3 = b'^3a^6, \quad a^3b'^3 = b'a^5,\\ a^5b'^3 = b'a^3, \quad a^6b'^3 = b'^3a^2, \quad a^7b'^3 = b'a.\end{gathered}$$

Il y a six faisceaux :

$$\begin{aligned}F_1 &= (1, a, a^2, a^3, \theta, a\theta, a^2\theta, a^3\theta), & F_4 &= (1, ab, a^2c\theta, a^3bc, \theta, ab\theta, a^2c, a^3bc\theta),\\ F_2 &= (1, b, \theta, b\theta, c, bc, c\theta, bc\theta), & F_5 &= (1, a^3b, a^2c\theta, abc\theta, \theta, a^3b\theta, a^2c, abc),\\ F_3 &= (1, a^2b, \theta, a^2b\theta, c, a^2bc, c\theta, a^2bc\theta), & F_6 &= (1, ac, a^2\theta, a^3c\theta, \theta, ac\theta, a^2, a^3c).\end{aligned}$$

31. *l*. Le groupe

$$(a^4 = \theta,\ b^2 = c^2 = \theta^2 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = bac)$$

a 16 opérations d'ordre 8, 4 d'ordre 4, 9 d'ordre 2.

Le groupe associé est d'ordre 16, les isomorphismes qui l'engendrent sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, bc, b\theta, bc\theta)(ab, abc, ab\theta, abc\theta)(a^2b, a^2bc, a^2b\theta, a^2bc\theta)\\ & \times (a^3b, a^3bc, a^3b\theta, a^3bc\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^3c, a^3c\theta),\\ \bar{b} = {} & (a, ac)(a^2, a^2\theta)(a^3, a^3c\theta)(ab, abc)(a^2b, a^2b\theta)\\ & \times (a^3b, a^3bc\theta)(a\theta, ac\theta)(a^2c, a^2c\theta)(ab\theta, abc\theta)(a^2bc, a^2bc\theta),\\ \bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(ab, ab\theta)(a^3b, a^3b\theta)\\ & \times (ac, ac\theta)(a^3c, a^3c\theta)(abc, abc\theta)(a^3bc, a^3bc\theta).\end{aligned}$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8}),$$

$$\begin{aligned}b' = ab = {} & (x_{11}x_{21}x_{31}x_{41}x_{15}x_{25}x_{35}x_{45})(x_{12}x_{44}x_{36}x_{24}x_{16}x_{48}x_{32}x_{28})\\ & \times (x_{13}x_{27}x_{33}x_{47}x_{17}x_{23}x_{37}x_{43})(x_{14}x_{42}x_{38}x_{22}x_{18}x_{46}x_{34}x_{26}).\end{aligned}$$

Les faisceaux sont :

$$\begin{gathered}F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{b'\} = (1, ab, a^2c, a^3bc\theta, \theta, ab\theta, a^2c\theta, a^3bc),\\ F_3 = \{a^3b'\} = (1, a^3b, a^2c, abc, \theta, a^3b\theta, a^2c\theta, abc\theta),\\ F_4 = \{ab'^2\}, \qquad F'_1 = \{a^2, b'^2\}, \qquad F'_2 = \{ab', a^3b'^3, a^4\},\\ F'_3 = \{a^3b', ab'^3, a^4\}.\end{gathered}$$

32. *m*. Le groupe

$$(a^4 = 1,\ b^2 = \theta,\ c^2 = \theta^2 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = bac)$$

a 20 opérations d'ordre 4, 11 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé,

lequel est d'ordre 16, sont :

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, bc, b\theta, bc\theta)(ab, abc, ab\theta, abc\theta)(a^2b, a^2bc, a^2b\theta, a^2bc\theta)\\ & \times (a^3b, a^3bc, a^3b\theta, a^3bc\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^3c, a^3c\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, ac)(a\theta, ac\theta)(a^2, a^2\theta)(a^3, a^3c\theta)(ab, abc)\\ & \times (ab\theta, abc\theta)(a^2b, a^2b\theta)(a^3b, a^3bc\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^2bc, a^2bc\theta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(ab, ab\theta)(a^3b, a^3b\theta)\\ & \times (ac, ac\theta)(a^3c, a^3c\theta)(abc, abc\theta)(a^3bc, a^3bc\theta).\end{aligned}$$

Le groupe régulier est engendré par les substitutions

$$\begin{aligned}a = {} & (x_{11}x_{31}x_{51}x_{71})(x_{12}x_{42}x_{54}x_{84})(x_{13}x_{33}x_{53}x_{73})(x_{14}x_{44}x_{52}x_{82})\\ & \times (x_{21}x_{43}x_{61}x_{83})(x_{22}x_{34}x_{64}x_{72})(x_{23}x_{41}x_{63}x_{81})(x_{24}x_{32}x_{62}x_{74}),\end{aligned}$$

$$b = \prod_{h=1}^{8}(x_{h1}x_{h2}x_{h3}x_{h4}), \qquad c = \prod_{h=1}^{4}\prod_{k=1}^{4}(x_{1+2(h-1),k}x_{2h,k}).$$

Voici les faisceaux :

$$\begin{aligned}F_1 &= (1, a, a^2, a^3, \theta, a\theta, a^2\theta, a^3\theta),\\ F_2 &= (1, a^2, c, a^2c, \theta, a^2\theta, c\theta, a^2c\theta),\\ F_3 &= (1, ab, a^2c\theta, a^3bc, \theta, ab\theta, a^2c, a^3bc\theta),\\ F_4 &= (1, a^2b, c, a^2bc, \theta, a^2b\theta, c\theta, a^2bc\theta),\\ F_5 &= (1, a^3b, a^2c, abc, \theta, a^3b\theta, a^2c\theta, abc\theta),\\ F_6 &= (1, ac, a^2\theta, a^3c\theta, \theta, ac\theta, a^2, a^3c),\\ F_7 &= (1, b, \theta, b\theta, c, bc, c\theta, bc\theta).\end{aligned}$$

33. *n*. Le groupe

$$(\mathfrak{J}^8 = b^2 = c^2 = 1, \ bc = cb\mathfrak{J}^4)$$

a

16 opérations d'ordre 8,
8 » » 4,
7 » » 2.

Posons

$$\mathfrak{J}^4 = \theta.$$

Le groupe associé est d'ordre 4 ; il est engendré par les

2 isomorphismes

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (c, c\theta)(bc, bc\theta)(c\mathfrak{J}, c\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta) \\ & \times (c\mathfrak{J}^2, c\mathfrak{J}^2\theta)(bc\mathfrak{J}^2, bc\mathfrak{J}^2\theta)(c\mathfrak{J}^3, c\mathfrak{J}^3\theta)(bc\mathfrak{J}^3, bc\mathfrak{J}^3\theta) \quad (\theta = \mathfrak{J}^4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (b, b\theta)(bc, bc\theta)(b\mathfrak{J}, b\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta) \\ & \times (b\mathfrak{J}^2, b\mathfrak{J}^2\theta)(bc\mathfrak{J}^2, bc\mathfrak{J}^2\theta)(b\mathfrak{J}^3, b\mathfrak{J}^3\theta)(bc\mathfrak{J}^2, bc\mathfrak{J}^3\theta).\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = b\mathfrak{J} = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} \ldots x_{h8}),$$

$$\begin{aligned}b' = \mathfrak{J} = {} & (x_{11}x_{21}x_{13}x_{23}x_{15}x_{25}x_{17}x_{27})(x_{12}x_{22}x_{14}x_{24}x_{16}x_{26}x_{18}x_{28}) \\ & \times (x_{13}x_{41}x_{33}x_{43}x_{35}x_{45}x_{37}x_{47})(x_{32}x_{42}x_{34}x_{44}x_{36}x_{46}x_{38}x_{48}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c = {} & (x_{11}x_{31})(x_{12}x_{36})(x_{13}x_{33})(x_{14}x_{38}) \\ & \times (x_{15}x_{35})(x_{16}x_{32})(x_{17}x_{37})(x_{18}x_{34})(x_{21}x_{41}) \\ & \times (x_{22}x_{46})(x_{23}x_{43})(x_{24}x_{48})(x_{25}x_{45})(x_{26}x_{42})(x_{27}x_{47})(x_{18}x_{44}).\end{aligned}$$

Les faisceaux sont :

$$F_1 = \{b, \mathfrak{J}\}, \qquad F_2 = \{c, \mathfrak{J}\}, \qquad F_3 = \{bc, \mathfrak{J}\}.$$

34. *o*. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{J},\ b^2 = \theta,\ c^2 = \mathfrak{J}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba,\ ac = ca\theta,\ bc = cb)$$

a 24 opérations d'ordre 4 et 7 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (c, c\theta)(ac, ac\theta)(bc, bc\theta)(abc, abc\theta) \\ & \times (c\mathfrak{J}, c\mathfrak{J}\theta)(ac\mathfrak{J}, ac\mathfrak{J}\theta)(bc\mathfrak{J}, bc\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J}, abc\mathfrak{J}\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a, a\theta)(ab, ab\theta)(ac, ac\theta)(abc, abc\theta) \\ & \times (a\mathfrak{J}, a\mathfrak{J}\theta)(ab\mathfrak{J}, ab\mathfrak{J}\theta)(ac\mathfrak{J}, ac\mathfrak{J}\theta)(abc\mathfrak{J}, abc\mathfrak{J}\theta).\end{aligned}$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les

opérations

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1,k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2})(x_{5,k} x_{6,3k-2} x_{7k} x_{8,3k-2}),$$

$$\begin{aligned} b = {} & (x_{11}x_{52}x_{13}x_{54})(x_{12}x_{53}x_{14}x_{51})(x_{21}x_{64}x_{23}x_{62})(x_{22}x_{61}x_{24}x_{63}) \\ & \times (x_{31}x_{72}x_{33}x_{74})(x_{32}x_{73}x_{34}x_{71})(x_{41}x_{84}x_{43}x_{82})(x_{42}x_{81}x_{44}x_{83}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & (x_{11}x_{51})(x_{12}x_{52})(x_{13}x_{53})(x_{14}x_{54}) \\ & \times (x_{21}x_{63})(x_{22}x_{64})(x_{23}x_{61})(x_{24}x_{62})(x_{31}x_{71})(x_{32}x_{72}) \\ & \times (x_{33}x_{73})(x_{34}x_{74})(x_{41}x_{83})(x_{42}x_{84})(x_{43}x_{81})(x_{44}x_{82}). \end{aligned}$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 16 :

$$\begin{aligned} F_1 &= (1, b, 0, b0, c, bc, c0, bc0, \mathfrak{I}, b\mathfrak{I}, \mathfrak{I}0, b\mathfrak{I}0, c\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}0, bc\mathfrak{I}0), \\ F_2 &= (1, a, \mathfrak{I}, a\mathfrak{I}, b, ab, b\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}, 0, a0, \mathfrak{I}0, a\mathfrak{I}0, b0, ab0, b\mathfrak{I}0, ab\mathfrak{I}0), \\ F_3 &= (1, ac, \mathfrak{I}0, ac\mathfrak{I}0, b, abc, b\mathfrak{I}0, abc\mathfrak{I}0, 0, ac0, \mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}, b0, abc0, b\mathfrak{I}). \end{aligned}$$

35. *p*. Le groupe

$$\left(\begin{array}{l} a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = 0,\ c^2 = \mathfrak{I}0,\ \mathfrak{I}^2 = 0^2 = 1, \\ ab = ba0,\ ac = ca\mathfrak{I}0,\ bc = cb\mathfrak{I}0 \end{array} \right)$$

a 28 opérations d'ordre 4 et 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, qui est d'ordre 8, est engendré par les 3 isomorphismes

$$\begin{aligned} \bar{a} = {} & (b, b0)(ab, ab0)(c, c\mathfrak{I}0) \\ & \times (ac, ac\mathfrak{I}0)(bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I})(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}0) \\ & \times (ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}0)(c\mathfrak{I}, c0)(ac\mathfrak{I}, ac0)(bc0, bc\mathfrak{I}0)(abc0, abc\mathfrak{I}0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b} = {} & (a, a0)(ab, ab0)(c, c\mathfrak{I}0) \\ & \times (ac, ac\mathfrak{I})(bc, bc\mathfrak{I}0)(abc, abc\mathfrak{I})(a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}0) \\ & \times (ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}0)(c\mathfrak{I}, c0)(ac0, ac\mathfrak{I}0)(bc\mathfrak{I}, bc0)(abc0, abc\mathfrak{I}0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{c} = {} & (a, a\mathfrak{I}0)(b, b\mathfrak{I}0)(ac, ac\mathfrak{I}0)(bc, bc\mathfrak{I}0) \\ & \times (a\mathfrak{I}, a0)(b\mathfrak{I}, b0)(ac\mathfrak{I}, ac0)(bc\mathfrak{I}, bc0). \end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier corres-

pondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8)$$
$$\times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$

$$c = (1, 17, 11, 27)(2, 28, 12, 18)(3, 19, 9, 25)(4, 26, 10, 20)$$
$$\times (5, 31, 15, 21)(6, 24, 16, 30)(7, 29, 13, 23)(8, 22, 14, 32).$$

Voici les faisceaux

$$F_1 = [1, a, \mathfrak{I}, a\mathfrak{I}, \theta, a\theta, \mathfrak{I}\theta, a\mathfrak{I}\theta],$$
$$E_2 = [1, b, \theta, b\theta, \mathfrak{I}, b\mathfrak{I}, \theta\mathfrak{I}, b\theta\mathfrak{I}],$$
$$F_3 = \left[\begin{matrix} 1, c, \mathfrak{I}\theta, c\mathfrak{I}\theta, \mathfrak{I}, c\mathfrak{I}, \theta, c\theta, ab, abc, ab\mathfrak{I}\theta, abc\mathfrak{I}\theta, \\ ab\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}, ab\theta, abc\theta \end{matrix}\right],$$
$$F_4 = [1, ac, \mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}, \theta, ac\theta, \mathfrak{I}\theta, ac\mathfrak{I}\theta],$$
$$F_5 = [1, bc, \theta, bc\theta, \mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}, \mathfrak{I}\theta, bc\mathfrak{I}\theta].$$

36. *q*. Le groupe

$$(a^2 = c^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca\mathfrak{I},\ bc = cb)$$

a

28 opérations d'ordre 4,
3 » » 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (b, b\theta)(ab, ab\theta)(c, c\mathfrak{I})$$
$$\times (bc, bc\mathfrak{I}\theta)(abc, abc\mathfrak{I}\theta)(ac, ac\mathfrak{I})(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)$$
$$\times (ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(c\theta, c\mathfrak{I}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\theta),$$

$$\bar{b} = (a, a\theta)(ab, ab\theta)(ac, ac\theta)(abc, abc\theta)$$
$$\times (a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}\theta).$$

$$\bar{c} = (a, a\mathfrak{I})(ab, ab\mathfrak{I})(ac, ac\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I})$$
$$\times (a\theta, a\mathfrak{I}\theta)(ab\theta, ab\mathfrak{I}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{I}\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}\theta).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier corres-

pondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8)$$
$$\times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$
$$c = (1, 17, 3, 19)(2, 20, 4, 18)(5, 21, 7, 23)(6, 24, 8, 22)$$
$$\times (9, 25, 11, 27)(10, 28, 12, 26)(13, 29, 15, 31)(14, 32, 16, 30).$$

Voici les faisceaux

$$F_1 = \{a, \mathfrak{I}, \theta\}, \quad F_2 = \{b, \theta, c, \mathfrak{I}\}, \quad F_3 = \{ab, \mathfrak{I}, \theta\},$$
$$F_4 = \{ac, \mathfrak{I}, \theta\}, \quad F_5 = \{abc, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

37. *r*. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ c^2 = \mathfrak{I}\theta,\ \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\ bc = cb)$$

a 28 opérations d'ordre 4 et 3 d'ordre 2.

Le groupe associé, d'ordre 4, est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = (b, b\theta)(ab, ab\theta)(bc, bc\theta)(abc, abc\theta)$$
$$\times (b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}\theta),$$
$$\bar{b} = (a, a\theta)(ab, ab\theta)(ac, ac\theta)(abc, abc\theta)$$
$$\times (a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}\theta).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8)$$
$$\times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$
$$c = (1, 17, 11, 27)(2, 18, 12, 28)(3, 19, 9, 25)(4, 20, 10, 26)$$
$$\times (5, 21, 15, 31)(6, 22, 16, 32)(7, 23, 13, 29)(8, 24, 14, 30).$$

Voici les faisceaux

$$F_1 = \{a, \mathfrak{I}, c, \theta\}, \quad F_2 = \{b, c\}, \quad F_3 = \{ab, c\}.$$

38. *s*. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = 0,\ c^2 = \mathfrak{I}^2 = 0^2 = 1,\ ab = ba0,\ ac = ca\mathfrak{I}0,\ bc = cb\mathfrak{I}0)$$

a 24 opérations d'ordre 4, et 7 opérations d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}
\bar{a} = {} & (b, b0)(ab, ab0)(c, c\mathfrak{I}0) \\
& \times (ac, ac\mathfrak{I}0)(bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I})(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}0) \\
& \times (ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}0)(c\mathfrak{I}, c0)(ac\mathfrak{I}, ac0)(bc0, bc\mathfrak{I}0)(abc0, abc0\mathfrak{I}), \\
\bar{b} = {} & (a, a0)(ab, ab0)(c, c\mathfrak{I}0) \\
& \times (ac, ac\mathfrak{I})(bc, bc\mathfrak{I}0)(abc, abc\mathfrak{I})(a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}0) \\
& \times (ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}0)(c\mathfrak{I}, c0)(ac0, ac\mathfrak{I}0)(bc\mathfrak{I}, bc0)(abc0, abc\mathfrak{I}0), \\
\bar{c} = {} & (a, a\mathfrak{I}0)(b, b\mathfrak{I}0)(ac, ac\mathfrak{I}0) \\
& \times (bc, bc\mathfrak{I}0)(a\mathfrak{I}, a0)(b\mathfrak{I}, b0)(ac\mathfrak{I}, ac0)(bc\mathfrak{I}, bc0).
\end{aligned}$$

Voici les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$\begin{aligned}
a = {} & (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8) \\
& \times (9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)(17, 18, 19, 20) \\
& \times (21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32). \\
b = {} & (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6) \\
& \times (3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8)(17, 21, 25, 29) \\
& \times (18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24), \\
c = {} & (1, 17)(2, 28)(3, 19)(4, 26) \\
& \times (5, 31)(6, 22)(7, 29)(8, 24)(9, 25) \\
& \times (10, 20)(11, 27)(12, 18)(13, 23)(14, 30)(15, 21)(16, 32).
\end{aligned}$$

Les faisceaux sont

$$\begin{aligned}
& F_1 = \{a, 0\}, \quad F_2 = \{b, \mathfrak{I}\}, \quad F_3 = \{ac, \mathfrak{I}\}, \\
& F_4 = \{bc, 0\}, \quad F_5 = \{c, ab, 0\}.
\end{aligned}$$

39. *t*. Le groupe $(a^4 = \mathfrak{I},\ b^2 = \mathfrak{I}^2 = 0^2 = 1,\ ab = ba^3 0)$ a 8 opérations d'ordre 8, 12 d'ordre 4, 11 d'ordre 2.

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, a^2b\theta, b\mathfrak{I}, a^2b\mathfrak{I}\theta)(ab, a^3b\theta, ab\mathfrak{I}, a^3b\mathfrak{I}\theta)\\ & \times (b\theta, a^2b, b\mathfrak{I}\theta, a^2b\mathfrak{I})(ab\theta, a^3b, ab\mathfrak{I}\theta, a^3b\mathfrak{I}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, a^3\theta)(a^2, a^2\mathfrak{I})(ab, a^3b\theta)(a^2b, a^2b\mathfrak{I})\\ & \times (a\mathfrak{I}, a^3\mathfrak{I}\theta)(a^2\theta, a^2\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, a^3b\mathfrak{I}\theta)(a^2b\theta, a^2b\mathfrak{I}\theta).\end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe associé sont

$$\begin{aligned}a = {} & (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)\\ & \times (17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32),\\ b = {} & (1, 9, 17, 25)(2, 28, 18, 12)(3, 15, 19, 31)(4, 26, 20, 10)\\ & \times (5, 13, 21, 29)(6, 32, 22, 16)(7, 11, 23, 27)(8, 30, 24, 14).\end{aligned}$$

Voici les faisceaux

$$\begin{aligned}F &= \{a, \theta\}, & F_1 &= \{ab, \mathfrak{I}, \theta\},\\ F_2 &= \{b, \mathfrak{I}, \theta\}, & F_3 &= \{a^2b, \mathfrak{I}, \theta\}.\end{aligned}$$

40. *a*. Le groupe $(a^8 = b^2 = \theta, \ \theta^2 = 1, \ ab = ba^7\theta)$ a 8 opérations d'ordre 16, 4 d'ordre 8, 18 d'ordre 4, 1 opération d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{\lambda+(-1)^\mu-1} b^\mu \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{-\lambda} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Voici les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant

$$\begin{aligned}a &= (1, 2, \ldots, 16)(17, 18, \ldots, 32),\\ b &= (1, 17, 9, 25)(2, 32, 10, 24)(3, 31, 11, 23)(4, 30, 12, 22)\\ &\quad \times (5, 29, 13, 21)(6, 28, 14, 20)(7, 27, 15, 19)(8, 26, 16, 18).\end{aligned}$$

Les faisceaux sont

$$F = \{a\} \qquad \text{(ordre 16)}$$

et 8 faisceaux d'ordre 4,

$$F_\lambda = \{a^\lambda b\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 7).$$

41. v. Le groupe $(a^8 = 0, b^2 = 0^2 = 1, ab = ba^7)$ a 8 opérations d'ordre 16, 4 d'ordre 8, 10 d'ordre 4, 9 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{\lambda+7^{2-\mu}-1} b^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{7\lambda} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$\begin{aligned} a &= (1, 2, 3, \ldots, 16)(17, 18, \ldots, 32), \\ b &= \quad (1,17)(2,24)(3,31)(4,22) \\ &\quad \times (5,29)(6,20)(7,27)(8,18)(9,25)(10,32) \\ &\quad \times (11,23)(12,30)(13,21)(14,28)(15,19)(16,26). \end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{a\}$$

et 8 faisceaux d'ordre 4,

$$F_{2\lambda+1} = \{a^{2\lambda+1} b\}, \qquad F_{2\lambda} = \{a^{2\lambda} b, 0\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3).$$

42. w. Le groupe $(a^8 = 0, \ b^2 = 0^2 = 1, \ ab = ba^7 0)$ a 8 opérations d'ordre 16, 4 d'ordre 8, 2 d'ordre 4, 17 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\lambda b \\ a^{\lambda-2} b \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a^\lambda b^\mu \\ a^{-\lambda} b^\mu \end{pmatrix}.$$

Le groupe régulier correspondant a pour substitutions génératrices

$$a = \prod_{h=1}^{2} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h,16}, \qquad b = \prod_{k=1}^{16} (x_{1,k}\, x_{2,-k}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16,

$$F = \{a\}$$

et 8 d'ordre 4,

$$F_\lambda = \{a^\lambda b, \theta\} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, 7).$$

43. x. Le groupe

$$(a^4 = \theta,\ b^2 = c^2 = 1,\ ab = ba^3,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\theta,\ \theta^2 = 1)$$

a 8 opérations d'ordre 8, 16 d'ordre 4, 7 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}
\bar{a} = {} & (b, a^2 b, b\theta, a^2 b\theta) \\
& \times (ab, a^3 b, ab\theta, a^3 b\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta) \\
& \times (a^3 c, a^3 c\theta)(bc, a^2 bc\theta, bc\theta, a^2 bc)(abc, a^3 bc\theta, abc\theta, a^3 bc), \\
\bar{b} = {} & (a, a^3)(a^2, a^2\theta)(ab, a^3 b)(a^2 b, a^2 b\theta)(c, c\theta) \\
& \times (ac, a^3 c\theta)(bc, bc\theta)(abc, a^3 bc\theta)(a\theta, a^3\theta)(ab\theta, a^3 b\theta), \\
\bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(b, b\theta)(a^2 b, a^2 b\theta) \\
& \times (ac, ac\theta)(a^3 c, a^3 c\theta)(bc, bc\theta)(a^2 bc, a^2 bc\theta).
\end{aligned}$$

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions que voici

$$\begin{aligned}
a = {} & (1, 2, \ldots, 8)(9, 10, \ldots, 16)(17, 18, \ldots, 24)(25, 26, \ldots, 32), \\
b = {} & (1, 9)(2, 12)(3, 15)(4, 10)(5, 13)(6, 16)(7, 11)(8, 14)(17, 25) \\
& \times (18, 28)(19, 31)(20, 26)(21, 29)(22, 32)(23, 27)(24, 30), \\
c = {} & (1, 7)(2, 22)(3, 19)(4, 24)(5, 21)(6, 18)(7, 23)(8, 20)(9, 29) \\
& \times (10, 26)(11, 31)(12, 28)(13, 25)(14, 30)(15, 27)(16, 32).
\end{aligned}$$

Il y a 6 faisceaux d'ordre 8

$$\begin{aligned}
& F_1 = \{a\}, && F_2 = \{ac\}, && F'_1 = \{ab, c\}, \\
& F'_2 = \{a^3 b, c\}, && F'_3 = \{a^2 c, b\}, && F'_4 = \{bc, a^2 b\}.
\end{aligned}$$

44. y. Le groupe

$$(a^4 = \theta,\ b^2 = c^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba^3\theta,\ ac = ca,\ bc = cb\theta)$$

a 8 opérations d'ordre 8, 12 d'ordre 4, 11 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, a^2b\theta, b\theta, a^2b)(ab, a^3b\theta, ab\theta, a^3b)\\ & \times (bc, a^2bc\theta, bc\theta, a^2bc)(abc, a^3bc\theta, abc\theta, a^3bc),\\ \bar{b} = {} & (a, a^3\theta)(a^2, a^2\theta)(a\theta, a^3)(ab, a^3b\theta)(a^2b, a^2b\theta)(a^3b, ab\theta)\\ & \times (c, c\theta)(ac, a^3c)(bc, bc\theta)(abc, a^3bc)(ac\theta, a^3c\theta)(abc\theta, a^3bc\theta),\\ \bar{c} = {} & (b, b\theta)(ab, ab\theta)(a^2b, a^2b\theta)(a^3b, a^3b\theta)\\ & \times (bc, bc\theta)(abc, abc\theta)(a^2bc, a^2bc\theta)(a^3bc, a^3bc\theta).\end{aligned}$$

Le groupe régulier correspondant a pour opérations génératrices

$$\begin{aligned}a = {} & (1, 2, \ldots, 8)(9, 10, \ldots, 17)(17, 18, \ldots, 24)(25, 26, \ldots, 32).\\ b = {} & (1, 9)(2, 16)(3, 15)(4, 14)(5, 13)(6, 12)(7, 11)(8, 10)(17, 25)\\ & \times (18, 32)(19, 31)(20, 30)(21, 29)(22, 28)(23, 27)(24, 26),\\ c = {} & (1, 17)(2, 18)(3, 19)(4, 20)(5, 21)(6, 22)(7, 23)(8, 24)(9, 29)\\ & \times (10, 30)(11, 31)(12, 32)(13, 25)(14, 26)(15, 27)(16, 28).\end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16

$$F = \{a, c\}$$

et 4 d'ordre 8

$$F_\lambda = \{a^2c, a^\lambda b\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3).$$

45. *z*. Le groupe

$$(a^4 = 0,\ b^2 = c^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba^3,\ ac = ca\theta,\ bc = cb)$$

a 8 opérations d'ordre 8, 8 d'ordre 4, 15 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, a^2b, b\theta, a^2b\theta)(ab, a^3b, ab\theta, a^3b\theta)\\ & \times (c, c\theta)(ac, ac\theta)(a^2c, a^2c\theta)(a^3c, a^3c\theta)\\ & \times (bc, a^2bc\theta, bc\theta, a^2bc)(abc, a^3bc\theta, abc\theta, a^3bc),\\ \bar{b} = {} & (a, a^3)(a^2, a^2\theta)(ab, a^3b)\\ & \times (a^2b, a^2b\theta)(ac, a^3c)(a^2c, a^2c\theta)(abc, a^3bc)\\ & \times (a^2bc, a^2bc\theta)(a\theta, a^3\theta)(ab\theta, a^3b\theta)(ac\theta, a^3c\theta)(abc\theta, a^3bc\theta),\\ \bar{c} = {} & (a, a\theta)(a^3, a^3\theta)(ab, ab\theta)(a^3b, a^3b\theta)\\ & \times (ac, ac\theta)(a^3c, a^3c\theta)(abc, abc\theta)(a^3bc, a^3bc\theta).\end{aligned}$$

Le groupe régulier correspondant a pour substitutions génératrices

$$a = (1, 2, \ldots, 8)(9, 10, \ldots, 16)(17, 18, \ldots, 24)(25, 26, \ldots, 32),$$

$$b = (1, 9)(2, 12)(3, 15)(4, 10)(5, 13)(6, 16)(7, 11)(8, 14)(17, 25)$$
$$\times (18, 28)(19, 31)(20, 26)(21, 29)(22, 32)(23, 27)(24, 30),$$

$$c = (9, 25)(1, 17)(2, 22)(3, 19)(4, 24)(5, 21)(6, 18)(7, 23)(8, 20)$$
$$\times (10, 30)(11, 27)(12, 32)(13, 29)(14, 26)(15, 31)(16, 28).$$

Il y a 4 faisceaux d'ordre 8 et 4 d'ordre 4

$$F_1 = \{a\}, \quad F_2 = \{ac\}, \quad F'_1 = \{b, c, 0\}, \quad F'_2 = \{a^2 b, c, 0\},$$
$$F''_1 = \{ab, 0\}, \quad F''_2 = \{a^3 b, 0\}, \quad F'''_1 = \{abc, 0\}, \quad F'''_2 = \{a^3 bc, 0\}.$$

46. α. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{I}^2 = 0^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}0,\ ac = ca\mathfrak{I},\ bc = cb\mathfrak{I})$$

a 16 opérations d'ordre 4 et 16 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = (b, b\mathfrak{I}0)(ab, ab\mathfrak{I}0)(c, c\mathfrak{I})(ac, ac\mathfrak{I})$$
$$\times (bc, bc0)(abc, abc0)(b0, b\mathfrak{I})(ab0, ab\mathfrak{I})$$
$$\times (c0, c\mathfrak{I}0)(ac0, ac\mathfrak{I}0)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}0)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}0).$$

$$\bar{b} = (a, a\mathfrak{I}0)(ab, ab\mathfrak{I}0)(c, c\mathfrak{I})(ac, ac0)$$
$$\times (bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc0)(a0, a\mathfrak{I})(ab0, ab\mathfrak{I})$$
$$\times (c0, c\mathfrak{I}0)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}0)(bc0, bc\mathfrak{I}0)(abc\mathfrak{I}, abc\mathfrak{I}0),$$

$$\bar{c} = (a, a\mathfrak{I})(b, b\mathfrak{I})(ac, ac\mathfrak{I})(bc, bc\mathfrak{I})$$
$$\times (a0, a\mathfrak{I}0)(b0, b\mathfrak{I}0)(ac0, ac\mathfrak{I}0)(bc0, bc\mathfrak{I}0).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16

$$F = \{ab, c, \mathfrak{I}\}$$

et 4 faisceaux d'ordre 8

$$F_1 = \{a, 0\}, \quad F_2 = \{bc, 0\}, \quad F'_1 = \{b, \mathfrak{I}, 0\}, \quad F'_2 = \{ac, \mathfrak{I}, 0\}.$$

Les isomorphismes qui engendrent le groupe régulier

correspondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5)(2, 24)(3, 7)(4, 22)(6, 20)(8, 18)(9, 13)(10, 32)(11, 15)$$
$$\times (12, 30)(14, 28)(16, 26)(17, 21)(19, 23)(25, 29)(27, 31),$$
$$c = (1, 9)(2, 12)(3, 11)(4, 10)(5, 15)(6, 14)(7, 13)(8, 16)(17, 25)$$
$$\times (18, 28)(19, 27)(20, 26)(21, 31)(22, 30)(23, 29)(24, 32).$$

47. β. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}\theta,\ ac = ca\mathfrak{I}\theta,\ bc = cb\theta)$$

a 20 opérations d'ordre 4 et 11 d'ordre 2.

Voici les isomorphismes qui engendrent ici le groupe associé

$$\bar{a} = (b, b\mathfrak{I}\theta)(ab, ab\mathfrak{I}\theta)(c, c\mathfrak{I}\theta)$$
$$\times (ac, ac\mathfrak{I}\theta)(b\theta, b\mathfrak{I})(ab\theta, ab\mathfrak{I})(c\theta, c\mathfrak{I})(ac\theta, ac\mathfrak{I}),$$
$$\bar{b} = (a, a\mathfrak{I}\theta)(ab, ab\mathfrak{I}\theta)(c, c\theta)(ac, ac\mathfrak{I})$$
$$\times (bc, bc\theta)(abc, abc\mathfrak{I})(a\theta, a\mathfrak{I})(ab\mathfrak{I}, ab\theta)$$
$$\times (c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}\theta),$$
$$\bar{c} = (a, a\mathfrak{I}\theta)(b, b\theta)(ab, ab\mathfrak{I})(ac, ac\mathfrak{I}\theta)$$
$$\times (bc, bc\theta)(abc, abc\mathfrak{I})(a\theta, a\mathfrak{I})(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)$$
$$\times (ab\theta, ab\mathfrak{I}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{I})(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}\theta).$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8

$$F = \{a, bc\}, \qquad F_1 = \{ab, \mathfrak{I}\}, \qquad F_2 = \{ac, \mathfrak{I}\},$$
$$F'_1 = \{b, \mathfrak{I}, \theta\}, \qquad F'_2 = \{c, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5)(2, 24)(3, 7)(4, 22)(6, 20)(8, 18)(9, 13)(10, 32)(11, 15)$$
$$\times (12, 30)(14, 28)(16, 26)(17, 21)(19, 23)(25, 29)(27, 31),$$
$$c = (1, 9)(2, 28)(3, 11)(4, 26)(5, 29)(6, 16)(7, 31)(8, 14)(10, 20)$$
$$\times (12, 18)(13, 21)(15, 23)(17, 25)(19, 27)(22, 32)(24, 30).$$

48. γ. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I},\ ac = ca\theta,\ bc = cb\theta)$$

a

12 opérations d'ordre 4,
19 » » 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, b\mathfrak{I})(ab, ab\mathfrak{I})(c, c\theta)(ac, ac\theta)\\ & \times (bc, bc\mathfrak{I}\theta)(abc, abc\mathfrak{I}\theta)(b\theta, b\mathfrak{I}\theta)(ab\theta, ab\mathfrak{I}\theta)\\ & \times (c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\theta)(abc\mathfrak{I}, abc\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, a\mathfrak{I})(ab, ab\mathfrak{I})(c, c\theta)(ac, ac\mathfrak{I}\theta)\\ & \times (bc, bc\theta)(abc, abc\mathfrak{I}\theta)(a\theta, a\mathfrak{I}\theta)(ab\theta, ab\mathfrak{I}\theta)\\ & \times (c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a, a\theta)(b, b\theta)(ac, ac\theta)(bc, bc\theta)\\ & \times (a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}\theta).\end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8 :

$$F = \{ab, c, \mathfrak{I}, \theta\},\quad F_1 = \{a, \theta\},\quad F_2 = \{ac, \theta\},$$
$$F_3 = \{bc, \mathfrak{I}\},\quad F' = \{b, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$\begin{aligned}a = {} & (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)\\ & \times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b = {} & (1, 5)(2, 8)(3, 7)(4, 6)(9, 13)(10, 16)(11, 15)(12, 14)(17, 21)\\ & \times (18, 24)(19, 23)(20, 22)(25, 29)(26, 32)(27, 31)(28, 30),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c = {} & (1, 9)(2, 26)(3, 11)(4, 28)(5, 29)(6, 14)(7, 31)(8, 16)(10, 18)\\ & \times (12, 20)(13, 21)(15, 23)(17, 25)(19, 27)(22, 30)(24, 32).\end{aligned}$$

49. δ. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}\theta,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\theta)$$

a 20 opérations d'ordre 4 et 11 d'ordre 2.

Voici les isomorphismes qui engendrent le groupe associé

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, b\mathfrak{I}0)(ab, ab\mathfrak{I}0)(c, c0)(ac, ac0)(bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I}) \\ & \times (b\mathfrak{I}, b0)(ab0, ab\mathfrak{I})(c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}0)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}0)(bc0, bc\mathfrak{I}0)(abc0, abc\mathfrak{I}0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, a\mathfrak{I}0)(ab, ab\mathfrak{I}0)(c, c0)(ac, ac\mathfrak{I})(bc, bc0)(abc, abc\mathfrak{I}) \\ & \times (a0, a\mathfrak{I})(ab0, ab\mathfrak{I})(c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}0)(ac0, ac\mathfrak{I}0)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}0)(abc0, abc\mathfrak{I}0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a, a0)(b, b0)(ac, ac0)(bc, bc0) \\ & \times (a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}0)(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}0)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}0)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}0).\end{aligned}$$

Il y a 1 faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8

$$\begin{aligned} F &= \{a, b, c, \mathfrak{I}\}, & F_1 &= \{a, 0\}, & F_2 &= \{ac, \mathfrak{I}\}, \\ F_3 &= \{bc, \mathfrak{I}\}, & F' &= \{b, \mathfrak{I}, 0\}. \end{aligned}$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$\begin{aligned} a = {} & (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16) \\ & \times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = {} & (1, 5)(2, 24)(3, 7)(4, 22)(6, 20)(8, 18)(9, 13)(10, 32)(11, 15) \\ & \times (12, 30)(14, 28)(16, 26)(17, 21)(19, 23)(25, 29)(27, 31), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = {} & (1, 9)(2, 26)(3, 11)(4, 28)(5, 29)(6, 14)(7, 31)(8, 16)(10, 18) \\ & \times (12, 20)(13, 21)(15, 23)(17, 25)(19, 27)(22, 30)(24, 32). \end{aligned}$$

50. ε. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = c^2 = \mathfrak{I}^2 = 0^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I},\ ac = ca\mathfrak{I},\ bc = cb0)$$

à 12 opérations d'ordre 4 et 19 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned}\bar{a} = {} & (b, b\mathfrak{I})(ab, ab\mathfrak{I})(c, c\mathfrak{I})(ac, ac\mathfrak{I}) \\ & \times (b0, b\mathfrak{I}0)(ab0, ab\mathfrak{I}0)(c0, c\mathfrak{I}0)(ac0, ac\mathfrak{I}0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{b} = {} & (a, a\mathfrak{I})(ab, ab\mathfrak{I})(c, c0)(ac, ac\mathfrak{I}0)(bc, bc0)(abc, abc\mathfrak{I}0) \\ & \times (a0, a\mathfrak{I}0)(ab0, ab\mathfrak{I}0)(c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}0)(ac0, ac\mathfrak{I})(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}0)(abc\mathfrak{I}, abc0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} = {} & (a, a\mathfrak{I})(b, b0)(ab, ab\mathfrak{I}0)(ac, ac\mathfrak{I})(bc, bc0)(abc, abc\mathfrak{I}0) \\ & \times (a0, a\mathfrak{I}0)(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}0)(ab0, ab\mathfrak{I})(ac0, ac\mathfrak{I}0)(bc\mathfrak{I}, bc\mathfrak{I}0)(abc\mathfrak{I}, abc0).\end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8

$$F = \{a, bc\}, \quad F_1 = \{b, \mathfrak{I}, \theta\}, \quad F_2 = \{ab, \mathfrak{I}, \theta\},$$
$$F_3 = \{c, \mathfrak{I}, \theta\}, \quad F_4 = \{ac, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Le groupe régulier correspondant a pour substitutions génératrices

$$\begin{aligned} a = {} & (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16) \\ & \times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32), \\ b = {} & (1, 5)(2, 8)(3, 7)(4, 6)(9, 13)(10, 16)(11, 15)(12, 14)(17, 21) \\ & \times (18, 24)(19, 23)(20, 22)(25, 29)(26, 32)(27, 31)(28, 30), \\ c = {} & (1, 9)(2, 12)(3, 11)(4, 10)(5, 29)(6, 32)(7, 31)(8, 30)(13, 21) \\ & \times (14, 24)(15, 23)(16, 22)(17, 25)(18, 28)(19, 27)(20, 26). \end{aligned}$$

51. ζ. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ c^2 = \mathfrak{I}^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\mathfrak{I})$$

a 24 opérations d'ordre 4 et 7 d'ordre 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\begin{aligned} \bar{a} = {} & (b, b\theta)(ab, ab\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta) \\ & \times (b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta)(c\mathfrak{I}, c\mathfrak{I}\theta)(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta), \\ \bar{b} = {} & (a, a\theta)(ab, ab\theta)(c, c\mathfrak{I})(ac, ac\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I}\theta)(a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(ab\mathfrak{I}, ab\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (c\theta, c\mathfrak{I}\theta)(ac\theta, ac\mathfrak{I})(bc\theta, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}), \\ \bar{c} = {} & (a, a\theta)(b, b\mathfrak{I})(ab, ab\mathfrak{I}\theta)(ac, ac\theta) \\ & \times (bc, bc\mathfrak{I})(abc, abc\mathfrak{I}\theta)(a\mathfrak{I}, a\mathfrak{I}\theta)(b\mathfrak{I}, b\mathfrak{I}\theta) \\ & \times (ab\theta, ab\mathfrak{I})(ac\mathfrak{I}, ac\mathfrak{I}\theta)(bc\theta, bc\mathfrak{I}\theta)(abc\theta, abc\mathfrak{I}). \end{aligned}$$

Il y a un faisceau d'ordre 16 et 4 faisceaux d'ordre 8 :

$$F = \{a, bc\}, \quad F_1 = \{b, \mathfrak{I}\}, \quad F_2 = \{ab, \theta\},$$
$$F_3 = \{ac, \theta\}, \quad F' = \{c, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Le groupe régulier correspondant admet pour substitu-

tions génératrices :

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$

$$b = (1, 5, 9, 13)(2, 14, 10, 6)(3, 7, 11, 15)(4, 16, 12, 8)$$
$$\times (17, 21, 25, 29)(18, 30, 26, 22)(19, 23, 27, 31)(20, 32, 28, 24),$$

$$c = (1, 17)(2, 26)(3, 19)(4, 28)(5, 23)(6, 32)(7, 21)(8, 30)(9, 25)$$
$$\times (10, 18)(11, 27)(12, 20)(13, 31)(14, 24)(15, 29)(16, 22).$$

52. η. Le groupe

$$\left(\begin{array}{c} a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0,\ \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca\theta \\ ad = da\theta,\ bc = cb\theta,\ bd = db\theta,\ cd = dc\theta \end{array}\right)$$

a

20 opérations d'ordre 4,
11 » » 2.

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\overline{a} = (b, b\theta)(ab, ab\theta)(c, c\theta)(ac, ac\theta)$$
$$\times (d, d\theta)(ad, ad\theta)(bcd, bcd\theta)(abcd, abcd\theta),$$

$$\overline{b} = (c, c\theta)(bc, bc\theta)(d, d\theta)(bd, bd\theta)$$
$$\times (a, a\theta)(ab, ab\theta)(acd, acd\theta)(abcd, abcd\theta),$$

$$\overline{c} = (d, d\theta)(cd, cd\theta)(a, a\theta)(ac, ac\theta)$$
$$\times (b, b\theta)(bc, bc\theta)(abd, abd\theta)(abcd, abcd\theta),$$

$$\overline{d} = (a, a\theta)(ad, ad\theta)(b, b\theta)(bd, bd\theta)$$
$$\times (c, c\theta)(cd, cd\theta)(abc, abc\theta)(abcd, abcd\theta).$$

Il y a 15 faisceaux d'ordre 8

$F_1 = \{a, bc\}$, $F_2 = \{a, bd\}$, $F_3 = \{a, cd\}$, $F_4 = \{b, ac\}$.
$F_5 = \{b, ad\}$, $F_6 = \{b, cd\}$, $F_7 = \{c, ab\}$, $F_8 = \{c, ad\}$.
$F_9 = \{c, bd\}$, $F_{10} = \{d, ab\}$, $F_{11} = \{d, ac\}$, $F_{12} = \{d, bc\}$.
$F'_1 = \{ab, cd\}$, $F'_2 = \{ac, bd\}$, $F'_3 = \{ad, bc\}$.

Les substitutions génératrices du groupe régulier corres-

pondant sont

$$a = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)(13, 14, 15, 16)$$
$$\times (17, 18, 19, 20)(21, 22, 23, 24)(25, 26, 27, 28)(29, 30, 31, 32),$$
$$b = (1, 5, 3, 7)(2, 8, 4, 6)(9, 13, 11, 15)(10, 16, 12, 14)$$
$$\times (17, 21, 19, 23)(18, 24, 20, 22)(25, 29, 27, 31)(26, 32, 28, 30),$$
$$c = (1, 9, 3, 11)(2, 12, 4, 10)(5, 15, 7, 13)(6, 14, 8, 16)$$
$$\times (17, 25, 19, 27)(18, 28, 20, 26)(21, 31, 23, 29)(22, 30, 24, 32),$$
$$d = (1, 17, 3, 19)(2, 20, 4, 18)(5, 23, 7, 21)(6, 22, 8, 24)$$
$$\times (9, 27, 11, 25)(10, 26, 12, 28)(13, 29, 15, 31)(14, 32, 16, 30).$$

CHAPITRE IV.

SUR QUELQUES GROUPES D'ORDRE 2^n.

53. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{2^{n-2}} = b^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^{2^{n-3}}\ (n > 3)]$$

a $2^{n-\alpha}$ opérations d'ordre $2^{n-\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$ et 3 opérations d'ordre 2.

Le groupe régulier correspondant est engendré par les substitutions

$$a = \prod_{h=1}^{2} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h,2^{n-1}}),$$

$$b = \prod_{k=1}^{2^{n-1}} (x_{1,k} x_{2,(2^{n-2}+1)k-2^{n-2}}).$$

Le groupe associé (d'ordre 4) est engendré par les isomorphismes

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} a^{\lambda} b \\ a^{\lambda+2^{n-2}} b \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} a^{2\lambda+1} b^{\mu} \\ a^{2\lambda+1+2^{n-2}} b^{\mu} \end{pmatrix}.$$

Il y a 3 faisceaux

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{I}\},$$

ayant en commun le sous-groupe conjugué de lui-même

$$\{\mathfrak{I}\}.$$

54. Soit le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \theta,\ \mathfrak{I}^{2^{n-3}} = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ n > 3).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-2}} (x_{h1} x_{h2} x_{h3} x_{h4}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (x_{1,k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2} \ldots x_{2^{n-2}-1,k} x_{2^{n-2},3k-2}).$$

Le groupe contient

$2^{n-\alpha}$	opérations	d'ordre	$2^{n-\alpha-1}$	$(\alpha = 1, 2, \ldots, n-3)$,
4	»	»	4,	
3	»	»	2.	

Il y a 3 faisceaux d'ordre 2^{n-1}

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F_3 = \{b, \mathfrak{I}\}.$$

55. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \mathfrak{I}^{2^{n-3}} = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta,\ (n > 3)]$$

a

2^{n-1}	opérations	d'ordre	2^{n-2},	
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-3}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-5)$,
7	»	»	2.	

Le groupe régulier est engendré par les substitutions

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h,2^{n-2}}),$$

$$\theta = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} (x_{1,k} x_{2,k})(x_{3,k} x_{4,k}),$$

$$b = (x_{11} x_{31})(x_{12} x_{42})(x_{13} x_{33})(x_{14} x_{44}) \ldots (x_{1,2^{n-2}-1} x_{3,2^{n-2}-1})(x_{1,2^{n-2}} x_{4,2^{n-2}})$$
$$\times (x_{21} x_{41})(x_{22} x_{32})(x_{23} x_{43})(x_{24} x_{34}) \ldots (x_{2,2^{n-2}-1} x_{4,2^{n-2}-1})(x_{2,2^{n-2}} x_{3,2^{n-2}}).$$

Les isomorphismes générateurs du groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^{\mu+1} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ ab^\beta \mathfrak{J}^\lambda \theta^{\mu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Il y a 3 faisceaux d'ordre 2^{n-4}

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{J}, \theta\}.$$

56. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{J},\ b^2 = 0,\ \mathfrak{J}^{2^{n-3}} = \theta^2 = 1,\ ab = ba\mathfrak{J}^{2^{n-4}}\ (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations	d'ordre	2^{n-2}	$(a\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu,\ ab\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-3}$	$[\alpha = 0, 1, 2, \ldots, (n-5)]$,
4	»	»	4	$(b,\ b\theta,\ b\mathfrak{J}^{n-4},\ b\theta\mathfrak{J}^{n-4})$,
3	»	»	2	$(\theta,\ \theta\mathfrak{J}^{n-4},\ \mathfrak{J}^{n-4})$.

Les substitutions du groupe régulier correspondant sont

$$a = \prod_{h=1}^{4} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h,2^{n-2}}),$$

$$b = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} (x_{1,k} x_{2,(1+2^{n-3})k-2^{n-3}} x_{3,k} x_{4,(1+2^{n-3})k-2^{n-3}}).$$

Le groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{J}^{\lambda+2^{n-4}} \theta^\mu \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ ab^\beta \mathfrak{J}^{\lambda+2^{n-4}} \theta^\mu \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

On a 3 faisceaux d'ordre 2^{n-4}

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F_3 = \{b, \mathfrak{J}\}.$$

57. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{J},\ b^4 = \mathfrak{J}^{2^{n-4}} = \theta,\ \theta^2 = 1,\ ba = ab^3\theta\ (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations d'ordre		2^{n-2}	$(a\mathfrak{J}^\lambda,\ ab\mathfrak{J}^\lambda,\ ab^2\mathfrak{J}^\lambda,\ ab^3\mathfrak{J}^\lambda)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-3}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-7)$,
24	»	»	8,	
4	»	»	4,	
3	»	»	2.	

Les opérations génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-3}} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h8}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{4} (\quad x_{1,k} x_{2,7k-6} x_{3,k} x_{4,7k-6} \ldots x_{2^{n-3}-1,k} x_{2^{n-3},7k-6}$$
$$\times x_{1,k+4} x_{2,7k-2} x_{3,k+4} x_{4,7k-2} \ldots x_{2^{n-3}-1,k+4} x_{2^{n-3},7k-2}).$$

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu, & a^\alpha b^2 \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu, & a^\alpha b^3 \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b^3 \mathfrak{J}^\lambda \theta^{\mu+1}, & a^\alpha b^2 \mathfrak{J}^\lambda \theta^{\mu+1}, & a^\alpha b \mathfrak{J}^\lambda \theta^{\mu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 0, 1),$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu \\ ab^{\beta+2} \mathfrak{J}^\lambda \theta^\lambda \end{pmatrix} \qquad (\beta = 0, 1, 2, 3).$$

Il y a 4 faisceaux d'ordre 2^{n-2}

$$F_1 = \{a\}, \qquad F_2 = \{ab\},$$
$$F_3 = \{ab^2\}, \qquad F_4 = \{ab^3\},$$

et un faisceau d'ordre 2^{n-1}

$$F = \{b, \mathfrak{J}\}.$$

58. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{J},\ b^4 = \theta,\ \mathfrak{J}^{2^{n-4}} = \theta^2 = 1,\ ba = ab^3\theta,\ (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations	d'ordre	2^{n-3}	$(ab^\beta \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu,\ \beta = 0, 1, 2, 3)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-4}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-8)$,
48	»	»	8,	
12	»	»	4,	
3	»	»	2.	

Les isomorphismes qui engendrent le groupe associé sont

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^2 \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^3 \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \\ a^\alpha b^3 \theta^{\lambda+1} \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^2 \theta^{\lambda+1} \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b \theta^{\lambda+1} \mathfrak{I}^\mu \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \\ ab^{\beta+2} \theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \end{pmatrix} \qquad (\beta = 0, 1, 2, 3).$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-3}} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h3}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1k} x_{2,7k-6} x_{3k} x_{4,7k-6} \ldots x_{2^{n-3}-1,k} x_{2^{n-3},7k-6}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 2^{n-1},

$$F = \{b, \mathfrak{I}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 2^{n-2},

$$F_\lambda = \{ab^\lambda, \theta\} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3).$$

59. Le groupe

$$(a^2 = \mathfrak{I},\ b^4 = \theta,\ \mathfrak{I}^{2^{n-4}} = \theta^2 = 1,\ ba = ab^3)$$

a le même nombre d'opérations d'ordre donné que le groupe précédent.

Le groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b\theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^2\theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^3\theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \\ a^\alpha b^3\theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b^2\theta^{\lambda+1} \mathfrak{I}^\mu, & a^\alpha b\theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} ab^\beta\theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \\ ab^{\beta+2}\theta^\lambda \mathfrak{I}^\mu \end{pmatrix}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-3}} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h8}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1k} x_{2,3k-2} x_{3,k} x_{4,3k-2} \ldots x_{2^{n-3}-1,k} x_{2^{n-3},3k-2}).$$

Il y a un faisceau d'ordre 2^{n-1},

$$F = \{b, \mathfrak{I}\},$$

et 4 faisceaux d'ordre 2^{n-2},

$$F_\lambda = \{ab^\lambda, \theta\}.$$

60. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{I},\ b^2 = \mathfrak{I}',\ \mathfrak{I}^{2^{n-4}} = \mathfrak{I}'^2 = \theta^2 = 1,\ ab = ba\theta \qquad (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations d'ordre		2^{n-3}	$(a\mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu,\ ab\mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu)$,
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-4}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-7)$,
24	»	»	4,	
7	»	»	2.	

Le groupe associé est engendré par les isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b\mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu \\ a^\alpha b\mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^{\nu+1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ab^\beta \mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^\nu \\ ab^\beta \mathfrak{I}^\lambda \mathfrak{I}'^\mu \theta^{\nu+1} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1);$$

il y a 3 faisceaux

$$F_1 = \{a, \mathfrak{I}', \theta\}. \qquad F_2 = \{ab, \mathfrak{I}', \theta\}. \qquad F_3 = \{b, \mathfrak{I}, \theta\}.$$

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$\begin{aligned} a = \; & (1, 2, 3, \ldots, 2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-3}+1, 2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n-2}) \\ & \times (2^{n-2}+1, 2^{n-2}+2, \ldots, 2^{n-2}+2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-2}+2^{n-3}+1, 2^{n-2}+2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n-1}) \\ & \times (2^{n-1}+1, 2^{n-1}+2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-1}+2^{n-3}+1, 2^{n-1}+2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}) \\ & \times (2^{n-1}+2^{n-2}+1, 2^{n-1}+2^{n-2}+2, \ldots, 2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}) \\ & \times (2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+1, 2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+2, \ldots, 2^{n}). \end{aligned}$$

Ensuite, à l'opération $a^\alpha b^\beta \mathfrak{J}^\lambda \mathfrak{J}'^\mu \theta^\nu$ je fais correspondre le nombre

$$1 + \alpha + 2\lambda + \beta 2^{n-3} + \mu 2^{n-2} + \nu 2^{n-1},$$

alors

$$b = \left[\begin{matrix} 1 + \alpha + 2\lambda + \beta 2^{n-3} + \mu 2^{n-2} + \nu 2^{n-1}, \\ 1 + \alpha + 2\lambda + (\beta + 1) 2^{n-3} + \mu 2^{n-2} + (\nu + \alpha) 2^{n-1} \end{matrix} \right].$$

61. Le groupe

$$[a^2 = \mathfrak{J},\ b^2 = 0,\ \mathfrak{J}^{2^{n-4}} = \theta^4 = 1,\ ba = ab\theta^2 \qquad (n > 4)]$$

a

2^{n-1}	opérations d'ordre		2^{n-3}	$(a\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu,\ ab\mathfrak{J}^\lambda\theta^\mu)$
$2^{n-\alpha-2}$	»	»	$2^{n-\alpha-4}$	$(\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-8)$
48	»	»	8	
12	»	»	4	
3	»	»	2	

Les substitutions génératrices du groupe régulier correspondant sont

$$b = \prod_{h=1}^{2^{n-3}} (x_{h1} x_{h2} \ldots x_{h8}),$$

$$a = \prod_{k=1}^{8} (x_{1,k} x_{2,5k-4} x_{3,k} x_{4,5k-4} \ldots x_{2^{n-3}-1,k} x_{2^{n-3},5k-4}).$$

Le groupe associé est engendré par les 2 isomorphismes

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a^\alpha b \mathfrak{Z}^\lambda \theta^\mu \\ a^\alpha b \mathfrak{Z}^\lambda \theta^{\mu+2} \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} a b^\beta \mathfrak{Z}^\lambda \theta^\mu \\ a b^\beta \mathfrak{Z}^\lambda \theta^{\mu+2} \end{pmatrix} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1).$$

Les faisceaux sont

$$F_1 = \{a, \theta\}, \qquad F_2 = \{ab, \theta\}, \qquad F = \{b, \mathfrak{Z}\}.$$

CHAPITRE V.

SUR LES GROUPES D'ORDRE p^5

(p PREMIER, PLUS GRAND QUE 3).

62. Dans ce qui va suivre, les lettres θ, ϑ, ϑ', θ', ... désigneront des opérations conjuguées d'elles-mêmes.

G_{p^5} ($\theta^{p^5} = 1$), a

$$p^\alpha(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^{\alpha+1} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4).$$

63. $G_{p^4}G_p$ a

$$\begin{array}{llll} p^\alpha(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^\alpha & (\alpha = 2, 3, 4). \\ p^2-1 & \quad\text{»} & \quad\text{»} \quad p & \end{array}$$

64. $G_{p^3}(G_p)^2$ a

$$\begin{array}{llll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^3, \\ p^3(p-1) & \quad\text{»} & \quad\text{»} \quad p^2, \\ p^3-1 & \quad\text{»} & \quad\text{»} \quad p. \end{array}$$

65. $G_{p^3}G_{p^2}$ a

$$\begin{array}{llll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^3, \\ p^2(p^2-1) & \quad\text{»} & \quad\text{»} \quad p^2, \\ p^2-1 & \quad\text{»} & \quad\text{»} \quad p. \end{array}$$

66. Le groupe ($a^p = \vartheta$, $\vartheta^{p^3} = b^p = 1$, $ab = ba\vartheta^{p^2}$) est de type (3) (1, 1).

Il a

$$p^\alpha(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^\alpha \qquad (\alpha = 2, 3, 4),$$
$$p^2-1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p.$$

67. Le groupe $(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^{p^2} = \theta^p = 1,\ ab = ba\theta)$, de type $(2, 1)(1, 1)$, a

$$p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^3,$$
$$p^2(p^2-1) \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p^2,$$
$$p^2-1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p.$$

68. Le groupe $(a^p = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{p^2} = b^p = \theta^p = 1,\ ab = ba\theta)$ [type $(2, 1)(1, 1)$] a

$$p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^3,$$
$$p^3(p-1) \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p^2,$$
$$p^3-1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p.$$

69. Le groupe $(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^{p^2} = \theta^p = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^p)$ [type $(2, 1)(1, 1)$] a

$$p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^3,$$
$$p^2(p^2-1) \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p^2,$$
$$p^2-1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p.$$

70. Le groupe *décomposable*

$$(a^p = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{p^2} = b^p = \theta^p = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^p) \qquad [\text{type } (2, 1)(1, 1)]$$

a

$$p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^3,$$
$$p^3(p-1) \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p^2,$$
$$p^3-1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p.$$

71. Pour *les groupes*

$$[a^{p^2} = \theta,\ b^{p^2} = \theta^p = 1,\ ab = ba^{1+p}\theta^\alpha \ (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, p-1)]$$

de type (1) (1, 1) (1, 1), on a la formule

$$(a^\lambda b^\mu)^\rho = b^{\mu\rho} a^{\lambda\left[\rho + \frac{\rho(\rho+1)}{2}\mu(p+\alpha p^2) + \mu\frac{\rho(\rho+1)}{12}\{\mu(2\rho+1)-3\}p^2\right]}.$$

On en déduit que ces groupes ont

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^3, \\ p^2(p^2-1) & \quad\text{»} \qquad\quad\text{»} & p^2, \\ p^2-1 & \quad\text{»} \qquad\quad\text{»} & p, \end{array}$$

lorsque l'on suppose $p > 3$.

72. Le groupe

$$(a^p = \mathfrak{J},\ b^p = \mathfrak{J}',\ \mathfrak{J}^p = \mathfrak{J}'^p = \theta^p = 1,\ ab = ba\theta) \qquad [\text{type } (1, 1, 1)(1, 1)]$$

a

$$\begin{array}{lll} p^3(p^2-1) & \text{opérations d'ordre} & p^2. \\ p^3-1 & \quad\text{»} \qquad\quad\text{»} & p. \end{array}$$

73. Le groupe décomposable

$$(a^{p^2} = b^{p^2} = \theta^p = 1,\ ab = ba^{1+p})$$

a le même nombre d'opérations d'ordre donné que les précédents.

74. Le groupe $(G_{p^2})^2 G_p$ a aussi le même nombre d'opérations d'ordre donné que les précédents.

75. Partons des équations de définition

$$a^p = \mathfrak{J},\quad \mathfrak{J}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\quad ac = ca\mathfrak{J}^{\delta p},\quad bc = cb\mathfrak{J}^{\varepsilon p},\quad ab = bac.$$

On a

$$ab^\mu = b^\mu ac^\mu \mathfrak{J}^{-\varepsilon p\frac{\mu(\mu-1)}{2}},$$

puis

$$a^\lambda b^\mu = b^\mu a^\lambda c^{\lambda\mu} \mathfrak{J}^{-\delta p\mu\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon p\lambda\frac{\mu(\mu-1)}{2}}$$

et

$$(a^\lambda b^\mu)^\rho = b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} c^{\lambda\mu\frac{\rho(\rho+1)}{2}} \mathfrak{J}^{-\delta\mu p\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\frac{\rho(\rho+1)}{2} - \varepsilon p\lambda\mu\frac{\rho(\rho+1)}{12}[(2\rho+1)\mu-3] - \lambda^2\mu\delta p\frac{\rho(\rho^2-1)}{3}}.$$

Je pose

$$\begin{aligned} a' &= a^\lambda b^\mu c^\nu \\ b' &= b^\sigma c^\rho \mathfrak{J}^{\varphi p} \\ c' &= b^\tau c^\upsilon \mathfrak{J}^{\psi p} \\ \mathfrak{J}'^p &= \mathfrak{J}^{\lambda p} \end{aligned} \qquad \lambda(\sigma\upsilon - \tau\rho) \not\equiv 0 \pmod p.$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\mathfrak{J}'^{\delta' p}, \qquad b'c' = c'b'\mathfrak{J}'^{\varepsilon' p}, \qquad a'b' = b'a'c';$$

il vient

$$\tau \equiv 0, \qquad \lambda\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon, \qquad \lambda\varepsilon' \equiv \varepsilon\upsilon\sigma, \qquad \upsilon \equiv \lambda\sigma,$$

puis

$$\psi \equiv \delta\lambda\rho - \varepsilon\nu\sigma - \delta\sigma\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon\lambda\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \varepsilon\rho\mu - \varepsilon\mu\upsilon.$$

Le groupe (pour $p > 3$) a

$$\begin{array}{lll} p^4(p-1) & \text{opérations d'ordre} & p^2, \\ p^3(p-1) & \quad\text{»} \qquad\qquad\text{»} & p^2, \\ p^3-1 & \quad\text{»} \qquad\qquad\text{»} & p. \end{array}$$

Des congruences précédentes on conclut $\varepsilon' \equiv \sigma^2\varepsilon$, ce qui montre que $[\varepsilon, p]$ est un invariant. De plus ε et ε' sont, en même temps, résidus ou non résidus quadratiques (mod p).

Nous avons ici 3 groupes :

$$(a^p = \mathfrak{J},\ \mathfrak{J}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\ ac = ca, \quad bc = cb\mathfrak{J}^p,\ ab = bac),$$

$$\left[a^p = \mathfrak{J},\ \mathfrak{J}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\ ac = ca, \quad bc = cb\mathfrak{J}^{\mu p},\ ab = bac,\ \left(\frac{\mu}{p}\right) = -1\right],$$

$$(a^p = \mathfrak{J},\ \mathfrak{J}^{p^2} = b^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{J}^p,\ bc = cb, \quad ab = bac),$$

dont les congruences qui précèdent permettraient de trouver les isomorphismes.

76. Si nous partons des équations

$$a^p = \mathfrak{I}, \qquad b^p = \theta, \qquad \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,$$
$$ac = ca\theta^\delta, \qquad bc = cb\theta^\varepsilon, \qquad ab = bac,$$

on a

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^p = \mathfrak{I}^\lambda \theta^{\mu - \varepsilon\lambda\mu \frac{p(p+1)}{12}[(2p+1)\mu - 3] - \delta\lambda^2\mu \frac{p(p^2-1)}{3}}.$$

Posons (en supposant $p > 3$)

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^\lambda \theta^\mu,$$
$$b' = a^\rho b^\sigma c^\varphi, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^\rho \theta^\sigma,$$
$$c' = c^\upsilon \mathfrak{I}^\psi \lambda^\tau$$

et exprimons que

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'c';$$

il vient

$$\rho\delta' \equiv 0, \qquad \sigma s\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon \qquad (\text{mod } p),$$
$$\rho\varepsilon' \equiv 0, \qquad \sigma s\varepsilon' \equiv \delta\sigma\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon \qquad (\text{mod } p),$$
$$\upsilon \equiv \lambda\sigma - \rho\mu, \qquad \psi \equiv 0,$$
$$\tau \equiv \delta(\lambda\varphi - \nu\rho) + \varepsilon(\mu\varphi - \nu\sigma)$$
$$- \delta\sigma\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon\lambda\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \delta\mu\frac{\rho(\rho-1)}{2} + \varepsilon\rho\frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

Les groupes correspondants ont

$$p^3(p^2-1) \text{ opérations d'ordre } p^2,$$
$$p^3 - 1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p.$$

La discussion des congruences précédentes donne les groupes

$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca,\quad bc = cb\theta,\ ab = bac),$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta,\quad bc = cb,\ ab = bac),$$
$$\left[a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta^u,\ bc = cb,\quad ab = bac,\quad \left(\frac{u}{p}\right) = -1\right],$$

dont on peut, en même temps, déterminer les groupes d'isomorphismes.

77. Partons des équations de définition

$$a^p = \mathfrak{J}, \quad b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \quad ac = ca\theta^\delta, \quad bc = cb\theta^\varepsilon, \quad ab = bac.$$

Alors

$$(a^\lambda b^\mu)^\rho = b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} c^{\lambda\mu\frac{\rho(\rho+1)}{2}} \theta^{-\delta\mu\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\frac{\rho(\rho+1)}{2} - \delta\lambda^2\mu\frac{\rho(\rho^2-1)}{3} - \varepsilon\lambda\mu\frac{\rho(\rho+1)}{12}[\mu(2\rho+1)-3]}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^\lambda b^\mu c^\nu \theta^\alpha, & \theta' &= \theta^\zeta \mathfrak{J}^\eta, \\ b' &= b^\rho c^\sigma \theta^\beta \mathfrak{J}^\gamma, & \mathfrak{J}' &= \mathfrak{J}^\lambda, \\ c' &= b^\tau c^\upsilon \theta^\varphi \mathfrak{J}^\psi, \end{aligned}$$

et exprimons que l'on a

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'c',$$

il vient

$$\begin{gathered} \tau \equiv 0, \qquad \eta\delta' \equiv 0, \qquad \zeta\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon \qquad (\text{mod } p), \\ \eta\varepsilon' \equiv 0, \qquad \zeta\varepsilon' \equiv \varepsilon\rho\upsilon, \qquad \psi \equiv 0, \qquad \upsilon \equiv \lambda\rho, \\ \varphi = \delta\lambda\sigma - \varepsilon\nu\rho - \delta\rho\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \varepsilon\lambda\frac{\rho(\rho-1)}{2} + \varepsilon\mu\sigma - \varepsilon\mu\upsilon. \end{gathered}$$

On a alors

$$\begin{aligned} &p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^2, \\ &p^4 - 1 \qquad\quad » \qquad\quad » \qquad p. \end{aligned}$$

La discussion des congruences donne 2 groupes du type (1, 1) (1) (1, 1)

$$(a^p = \mathfrak{J},\ b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca,\ \ bc = cb\theta,\ ab = bac),$$
$$(a^p = \mathfrak{J},\ b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ \ ab = bac),$$

plus un groupe décomposable du type (1, 1, 1) (1, 1).

Les mêmes congruences serviront à trouver les isomorphismes.

78. Soit, maintenant,

$$a^p = \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J}^{p^2} = b^p = c^p = 1, \quad ab = ba\mathfrak{J}^{\delta p},$$
$$ac = ca\mathfrak{J}^{\varepsilon p}, \quad bc = cb\mathfrak{J}^{\zeta p},$$

d'où

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \mathfrak{J}^{(\delta\lambda\mu + \varepsilon\nu\lambda + \zeta\mu\nu)p\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^\lambda b^\mu c^\nu \\ b' &= b^\rho c^\sigma \mathfrak{J}^{\varphi p} \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^\lambda. \\ c' &= b^\tau c^\upsilon \mathfrak{J}^{\psi p} \end{aligned}$$

Écrivons que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{J}'^{\delta' p}, \qquad a'c' = c'a'\mathfrak{J}'^{\varepsilon' p}, \qquad b'c' = c'b'\mathfrak{J}'^{\zeta' p}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \lambda\delta' &\equiv \delta\lambda\rho + \varepsilon\lambda\sigma + \zeta(\mu\sigma - \nu\rho) \qquad (\text{mod } p), \\ \lambda\varepsilon' &\equiv \delta\lambda\tau + \varepsilon\lambda\upsilon + \zeta(\mu\upsilon - \nu\tau) \end{aligned}$$

et

$$\lambda\zeta' \equiv \zeta(\rho\upsilon - \sigma\tau) \qquad (\text{mod } p).$$

La discussion des congruences donne le groupe

$$(\mathfrak{J}^{p^3} = b^p = c^p = 1, \ bc = cb\mathfrak{J}^{p^2}), \qquad \text{type } (3)(1,1),$$

qui a

$$\begin{aligned} &p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^3, \\ &p^3(p-1) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad p^2, \\ &p^3 - 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad p. \end{aligned}$$

79. Soit

$$a^p = \mathfrak{J}, \quad b^p = \theta, \quad \mathfrak{J}^p = \theta^p, \quad \mathfrak{J}^p = \theta^p = c^p = 1,$$
$$ab = ba\theta^\delta, \quad ac = ca\theta^\varepsilon, \quad bc = cb\theta^\zeta,$$

d'où

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \theta^{(\delta\lambda\mu + \varepsilon\lambda\nu + \zeta\mu\nu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}$$

Posons

$$\begin{aligned} &a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^\lambda \theta^\mu, \\ &b' = b^\sigma c^\tau \mathfrak{J}^\alpha, \qquad \theta' = \theta^\sigma, \qquad \lambda\sigma\upsilon \not\equiv 0 \pmod p, \\ &c' = c^\upsilon \mathfrak{J}^\varphi \theta^\psi. \end{aligned}$$

Exprimons que

$$a'b' = b'a'\theta'^{\delta'}, \qquad a'c' = c'a'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} &\sigma\delta' \equiv \varepsilon\lambda\tau + \delta\lambda\sigma + \zeta(\mu\tau - \nu\sigma) \pmod p, \\ &\sigma\varepsilon' \equiv \varepsilon\lambda\upsilon + \zeta\mu\upsilon, \qquad \zeta' \equiv \zeta\upsilon \pmod p. \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} &p^3(p^2-1) \text{ opérations d'ordre } p^2, \\ &p^3-1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad p. \end{aligned}$$

On trouve le groupe

$$(a^p = \mathfrak{J},\ \theta^{p^2} = \mathfrak{J}^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta^p), \qquad \text{type } (2,1)(1,1),$$

puis des groupes décomposables.

80. Soit

$$\begin{aligned} &a^p = \mathfrak{J},\ b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \\ &ab = ba\theta^\delta, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon, \qquad bc = cb\theta^\zeta, \end{aligned}$$

d'où

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \theta^{(\delta\lambda\mu + \varepsilon\lambda\nu + \zeta\mu\nu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$\begin{aligned} &a' = a^\lambda b^\mu c^\nu \theta^\alpha, \qquad \theta' = \theta^\omega, \\ &b' = b^\rho c^\sigma \theta^\beta \mathfrak{J}^\varphi, \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^\lambda, \\ &c' = b^\tau c^\upsilon \theta^\gamma \mathfrak{J}^\psi, \end{aligned}$$

et exprimons que

$$a'b' = b'a'\theta'^{\delta'}, \qquad a'c' = c'a'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\omega\delta' \equiv \delta\lambda\rho + \varepsilon\lambda\sigma + \zeta(\sigma\mu - \nu\rho) \pmod{p},$$
$$\omega\varepsilon' = \delta\lambda\tau + \varepsilon\lambda\upsilon + \zeta(\mu\upsilon - \nu\tau),$$
$$\omega\zeta' \equiv \zeta(\rho\upsilon - \tau\sigma).$$

La discussion de ces congruences ne donne que des groupes décomposables.

81. Partons des équations de définition

$$a^p = \mathfrak{I}, \qquad b^p = \theta, \qquad c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,$$
$$ac = ca\mathfrak{I}^\gamma\theta^\delta, \qquad bc = cb\theta^\varepsilon, \qquad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\zeta.$$

Alors

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^\rho = c^{\nu\rho} b^{\mu\rho} a^{\lambda\rho} \mathfrak{I}^{(\lambda\mu+\gamma\lambda\nu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}} \theta^{(\delta\lambda\nu+\varepsilon\mu\nu+\zeta\lambda\mu)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^\lambda\theta^\mu$$
$$b' = a^\rho b^\sigma c^\tau, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^\rho\theta^\sigma \qquad \upsilon(\lambda\sigma - \mu\rho) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$
$$c' = c^\upsilon \mathfrak{I}^\varphi\theta^\psi$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\mathfrak{I}'^{\gamma'}\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\lambda\gamma' + \rho\delta' \equiv \gamma\lambda\upsilon, \qquad \mu\gamma' + \sigma\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon\mu\upsilon,$$
$$\rho\varepsilon' \equiv \gamma\rho\upsilon, \qquad \sigma\varepsilon' \equiv \delta\rho\upsilon + \varepsilon\sigma\upsilon,$$
$$\rho\zeta' + \lambda \equiv \gamma(\lambda\tau - \rho\nu) + \lambda\sigma - \mu\rho,$$
$$\sigma\zeta' + \mu \equiv \delta(\lambda\tau - \rho\nu) + \varepsilon(\tau\mu - \nu\sigma) + \zeta(\lambda\sigma - \mu\rho).$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left\{\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}\theta,\ bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{I} \\ a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}^\gamma,\ bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{I} \\ \text{[2 valeurs de } \gamma \text{ associées, telles que leur produit soit congru} \\ \text{à } 1 \pmod{p}\text{, donnent le même groupe]} \end{array}\right\},$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\mathfrak{I},\ bc = cb,\ ab = ba\mathfrak{I}\theta),$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = c^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = ba\mathfrak{I}).$$

82. Soit

$$a^p = \mathfrak{J}, \qquad c^p = \theta, \qquad b^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,$$
$$ac = ca\theta^\delta, \qquad bc = cb\theta^\varepsilon, \qquad ab = ba\mathfrak{J}\theta^\zeta,$$

de sorte que

$$(a^\lambda b^\mu c^\nu)^p = \mathfrak{J}^\lambda \theta^\nu \qquad (p > 3).$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^\lambda \theta^\nu,$$
$$b' = b^\rho \mathfrak{J}^\varphi \theta^\psi, \qquad \theta' = \mathfrak{J}^\sigma \theta^\upsilon,$$
$$c' = a^\sigma b^\tau c^\upsilon.$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'\mathfrak{J}'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\sigma\delta' \equiv \lambda\tau - \mu\sigma, \qquad \upsilon\delta' \equiv \delta(\lambda\upsilon - \sigma\nu) + \varepsilon(\mu\upsilon - \nu\tau) + \zeta(\lambda\tau - \mu\sigma),$$
$$\sigma\varepsilon' \equiv -\sigma\rho, \qquad \upsilon\varepsilon' \equiv \varepsilon\upsilon\sigma - \zeta\rho\sigma,$$
$$\sigma\zeta' \equiv \lambda\rho - \lambda, \qquad \upsilon\zeta' \equiv \zeta\lambda\rho - \varepsilon\nu\rho - \nu.$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left(\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{J},\ b^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,\ c^p = \theta,\ ac = ca,\ bc = cb\theta^\varepsilon,\ ab = ba\mathfrak{J} \\ \text{deux valeurs de } \varepsilon\text{, associées, donnent le même groupe} \end{array}\right) \text{ [type (1, 1) (1, 1, 1)].}$$

83. Soit

$$a^p = \mathfrak{J}, \qquad b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \qquad ac = ca\theta^\delta,$$
$$bc = cb\theta^\varepsilon, \qquad ab = ba\mathfrak{J}\theta^\zeta.$$

Posons

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu \theta^\alpha, \qquad \theta' = \mathfrak{J}^\omega \theta^\eta,$$
$$b' = b^\rho c^\sigma \mathfrak{J}^\varphi \theta^\beta, \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^\lambda,$$
$$c' = b^\tau c^\upsilon \mathfrak{J}^\psi \theta^\gamma.$$

Exprimons que

$$a'c' = c'a'\theta'^{\delta'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad a'b' = b'a'\mathfrak{J}'\theta'^{\zeta'}.$$

Il vient

$$\omega\delta' \equiv \lambda\tau, \qquad \eta\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon + \varepsilon(\mu\upsilon - \nu\sigma) + \zeta\lambda\tau,$$
$$\omega\varepsilon' \equiv 0, \qquad \eta\varepsilon' \equiv \varepsilon(\upsilon\rho - \sigma\tau),$$
$$\omega\zeta' + \lambda \equiv \lambda\rho, \qquad \eta\zeta' \equiv \delta\lambda\sigma + \varepsilon(\mu\sigma - \nu\rho) + \zeta\lambda\rho,$$

qui donnent les groupes

$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{I}),$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb,\ ab = ba\mathfrak{I}),$$

plus un groupe décomposable.

84. Soit maintenant

$$a^p = \theta,\quad b^p = c^p = d^p = 1,\quad ab = bac,\quad ac = ca\theta^{\zeta},\quad ad = da\theta^{\eta},$$
$$bc = cb\theta^{\lambda},\quad cd = dc\theta^{\nu},\quad bd = dbc^{\delta}\theta^{\mu},\quad (\nu = \delta\zeta),\quad (p > 3).$$

Alors on a

$$(a^l b^n d^m)^\rho = d^{m\rho}(a^l b^n)^\rho c^{mn\delta\frac{\rho(\rho+1)}{2}}$$
$$\times\, \theta^{m\frac{\rho(\rho+1)}{2}\left(n\mu+\eta l-\lambda\delta\frac{n(n-1)}{2}\right)+\nu\delta nm\frac{\rho(\rho+1)}{12}[m(2\rho+1)-3]}\theta^{-mn\delta(\zeta l+\lambda m)\frac{\rho(\rho^2-1)}{3}}.$$

Donc

$$(a^l b^n d^m c^p)^p = \theta^l.$$

Soit

$$a' = a^l b^m d^n c^p,$$
$$b' = b^r d^s c^t \theta^\alpha,$$
$$c' = b^\rho d^\sigma c^\upsilon \theta^\beta, \qquad \theta' = \theta^l,$$
$$d' = b^\tau d^\varphi c^\psi \theta^\gamma,$$

et exprimons que $a'b' = b'a'c'$, $a'c' = c'a'\theta'^{\zeta'}$, $a'd' = d'a'\theta'^{\eta'}, \ldots$, on a

$$\upsilon \equiv lr + \delta(ms - nr)$$

puis une congruence qui donne β, et que je n'écris point; puis

$$l\zeta' \equiv \zeta l\upsilon + \lambda m\upsilon - \nu n\upsilon,$$
$$l\tau \equiv \delta(n\tau - m\varphi),$$

puis une congruence qui donne η' et que je n'écris point;

puis

$$l\lambda' \equiv \lambda r\upsilon - \nu s\upsilon,$$
$$l\nu' \equiv -\lambda\tau\upsilon + \nu\varphi\upsilon,$$
$$\upsilon\delta' \equiv \delta(r\varphi - s\tau),$$

$$\begin{aligned}\beta\delta' + l\mu' \equiv \lambda(r\psi - t\tau) + \mu(r\varphi - s\tau) + \nu(t\varphi - s\psi)\\ + \nu\delta\left(r\frac{\varphi(\varphi-1)}{2} - \tau\frac{s(s-1)}{2}\right)\\ + \lambda\delta\left(s\frac{\tau(\tau-1)}{2} - \varphi\frac{r(r-1)}{2}\right) + \nu\delta\varphi s(r-\tau).\end{aligned}$$

Voici les groupes correspondants

$$\left(\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\ ac = ca\theta \\ ad = da,\ bc = cb\theta,\ cd = dc\theta,\ bd = dbc \end{matrix}\right),$$
$$\left(\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da\theta,\ bc = cb\theta,\ cd = dc,\ bd = dbc \end{matrix}\right),$$
$$\left(\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da,\ bc = cb\theta,\ cd = dc,\ bd = dbc \end{matrix}\right),$$
$$\left(\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\ ac = ca\theta \\ ad = da,\ bc = cb\theta,\ cd = dc,\ bd = db\theta \end{matrix}\right),$$
$$\left[\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\ ac = ca\theta \\ ad = da,\ bc = cb\theta^u,\ cd = dc,\ bd = db\theta,\ \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{matrix}\right].$$
$$\left(\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da\theta,\ bc = cb\theta,\ cd = dc,\ bd = db \end{matrix}\right),$$
$$\left[\begin{matrix} a^p = \theta,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da\theta,\ bc = cb\theta^u,\ cd = dc,\ bd = db,\ \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{matrix}\right],$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^p = \theta^p = b^p = c^p = 1,\ ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I},\ ab = ba\theta),$$

plus des groupes décomposables.

85. Soit

$$a^p = \theta, \quad b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \quad ab = ba\theta^\alpha, \quad ac = ca,$$
$$ad = da\theta^\beta, \quad bc = cb\theta^\gamma, \quad bd = dbc, \quad cd = dc\theta^\delta.$$

Alors

$$(b^\mu d^\sigma)^p = \theta^{\delta\mu\sigma\frac{p(p+1)}{12}[\sigma(2p+1)-3]-\gamma\sigma\mu^2\frac{p(p^2-1)}{3}}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^\lambda b^\mu c^\nu d^\rho, \\ b' &= b^\sigma c^\tau d^\upsilon \theta^m, \\ c' &= b^\varepsilon c^\zeta d^\eta \theta^n, \qquad \theta' = \theta^\lambda \quad (p > 3), \\ d' &= b^\iota c^\varphi d^\psi \theta^q. \end{aligned}$$

Exprimons que $a'b' = b'a'\theta'^{\alpha'}, \ldots$.
Il vient

$$\zeta \equiv \sigma\psi - \iota\upsilon, \qquad \lambda\gamma' \equiv \gamma\sigma\zeta - \delta\upsilon\zeta, \qquad \lambda\delta' \equiv \delta\psi\zeta - \gamma\iota\zeta,$$

$$\begin{aligned} n \equiv \delta\Big(\zeta\upsilon - \iota\frac{\upsilon(\upsilon-1)}{2} + \sigma\frac{\psi(\psi-1)}{2} - \upsilon(\varphi - \iota\upsilon) \\ + \psi(\tau + \zeta - \sigma\psi)\Big) + \gamma\Big(\upsilon\frac{\iota(\iota-1)}{2} - \psi\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} - \iota\tau + \sigma\varphi\Big), \end{aligned}$$

$$\rho\sigma \equiv \mu\upsilon, \qquad \delta\rho \equiv \gamma\mu, \qquad \rho^2 \equiv \mu\psi,$$

$$\begin{aligned} \lambda\alpha' \equiv \alpha\lambda\sigma + \beta\lambda\upsilon + \gamma\Big(\rho\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} - \upsilon\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu\tau - \nu\sigma\Big) \\ + \delta\Big(\mu\frac{\upsilon(\upsilon-1)}{2} - \sigma\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \rho(\tau - \rho\sigma) + \upsilon(\nu - \mu\upsilon)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda\beta' \equiv \alpha\lambda\iota + \beta\lambda\psi + \gamma\Big(\rho\frac{\iota(\iota-1)}{2} - \psi\frac{\mu(\mu-1)}{2} + \mu\varphi - \nu\iota\Big) \\ + \delta\Big(\mu\frac{\psi(\psi-1)}{2} - \iota\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \varphi(\varphi - \rho\iota) + \psi(\nu - \mu\psi)\Big). \end{aligned}$$

Voici les groupes que donne la discussion de ces congruences

$$\left(\begin{matrix} a^p = \theta, \ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \ ab = ba\theta \ \ ac = ca \\ ad = da, \ bc = cb, \ bd = dbc, \ cd = dc\theta \end{matrix}\right)$$

$$(\mathfrak{J}^{p^2} = b^p = c^p = d^p = 1, \ bc = cb\mathfrak{J}^p, \ bd = dbc, \ cd = dc).$$

86. Soit

$$\begin{aligned} &a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad ab = bac, \qquad ac = ca\theta^\zeta, \\ &ad = da\theta^\eta, \qquad bc = cb\theta^\lambda, \qquad bd = db\theta^\mu, \qquad cd = dc. \end{aligned}$$

Alors

$$(a^l b^m c^n d^q)^\rho = (c^n d^q)^\rho (a^l b^m)^\rho \theta^{(\lambda mn + \mu mq + \zeta ln + \eta lq)\frac{\rho(\rho+1)}{2}}.$$

Posons

$$\begin{aligned}
a' &= a^l b^m c^n d^\pi \theta^\alpha,\\
b' &= a^q b^r c^s d^t \theta^\beta,\\
c' &= c^u \theta^\gamma,\\
d' &= a^\rho b^\sigma c^\tau d^\varepsilon \theta^\delta,\\
\theta' &= \theta^\omega.
\end{aligned}$$

Exprimons que

$$a'b' = b'a'c', \qquad a'c' = c'a'\theta'^\zeta, \quad \ldots.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
u &\equiv bc - mq \qquad (\operatorname{mod} p),\\
\gamma &\equiv \eta(lt - \pi q) + \zeta(ls - qn)\\
&\quad + \mu(mt - \pi r) + \lambda\left(q\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{r(r-1)}{2}\right)\\
&\quad + \zeta\left(m\frac{q(q-1)}{2} - r\frac{l(l-1)}{2}\right) + \lambda(ms - nr) + \lambda mr(q-l),\\
&\omega\zeta' \equiv \zeta lu + \lambda mu, \qquad m\rho \equiv \sigma l,\\
\omega\eta' &\equiv \eta(l\varepsilon - \pi\rho) + \zeta(l\tau - \rho n)\\
&\quad + \mu(m\varepsilon - \pi\sigma) + \lambda\left(\rho\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\right)\\
&\quad + \zeta\left(m\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \sigma\frac{l(l-1)}{2}\right) + \lambda(m\tau - \sigma n) + \lambda m\sigma(\rho - l),\\
&\omega\lambda' \equiv \xi qu + \lambda ru, \qquad r\rho \equiv q\sigma, \qquad \lambda\sigma + \zeta\rho \equiv 0,\\
\omega\mu' &\equiv \eta(q\varepsilon - t\rho) + \zeta(q\tau - s\rho)\\
&\quad + \mu(r\varepsilon - t\sigma) + \lambda\left(\rho\frac{r(r-1)}{2} - q\frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\right)\\
&\quad + \zeta\left(r\frac{\rho(\rho-1)}{2} - \sigma\frac{q(q-1)}{2}\right) + \lambda(r\tau - s\sigma) + \lambda r\sigma(\rho - q).
\end{aligned}$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \ ab = bac,\\ ac = ca\theta, \ ad = da, \ bc = cb, \ bd = db\theta, \ cd = dc \end{matrix}\right),$$

$$(a^p = b^p = c^p = \theta^p = \mathfrak{I}^p = 1, \ ab = ba\mathfrak{I}, \ ac = ca\theta, \ bc = cb),$$

plus des groupes décomposables.

87. Si l'on part des équations de définition

$$a^p = \theta, \qquad c^p = \mathfrak{J}, \qquad b^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \qquad ab = ba\mathfrak{J}\theta^\delta,$$
$$ac = ca\theta^\varepsilon, \qquad bc = cb\theta^\zeta,$$

que l'on pose

$$a' = a^\lambda b^\mu c^\nu, \qquad \theta' = \theta^\lambda \mathfrak{J}^\nu,$$
$$c' = a^\rho b^\sigma c^\tau, \qquad \mathfrak{J}' = \theta^\rho \mathfrak{J}^\tau,$$
$$b' = b^\upsilon \mathfrak{J}^\varphi \theta^\psi,$$

et que l'on exprime que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{J}'\theta'^{\delta'}, \ldots$$

il vient

$$\tau + \nu\delta' \equiv \lambda\upsilon, \qquad \rho + \lambda\delta' \equiv \delta\lambda\upsilon - \zeta\nu\upsilon,$$
$$\nu\varepsilon' \equiv \lambda\sigma - \rho\mu, \qquad \nu\zeta' + \rho\upsilon \equiv 0, \qquad \lambda\zeta' \equiv \zeta\tau\upsilon - \delta\rho\upsilon,$$
$$\lambda\varepsilon' \equiv \varepsilon(\lambda\tau - \nu\rho) + \zeta(\mu\tau - \nu\sigma) + \delta(\lambda\sigma - \rho\mu).$$

On en conclut, par exemple,

$$(\zeta' - \zeta\upsilon^2)^2 \equiv \upsilon(\delta' - \delta\upsilon)(\delta\zeta' - \zeta\delta'\upsilon).$$

Les groupes correspondants auront

$$p^3(p^2 - 1) \text{ opérations d'ordre } p^2,$$
$$p^3 - 1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad p.$$

Voici ces groupes

$$\left[\begin{matrix} a^p = \mathfrak{J}, \ c^p = \theta, \ b^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1 \\ ac = ca, \ bc = cb\mathfrak{J}^\alpha, \ ab = ba\mathfrak{J}\theta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p-1) \end{matrix}\right],$$
$$(a^p = \mathfrak{J}, \ b^p = \theta, \ c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \ ac = ca\mathfrak{J}\theta, \ ab = ba\mathfrak{J}, \ bc = cb)$$
$$(a^p = \theta, \ b^p = \theta^p = \mathfrak{J}^{p^2} = 1, \ ab = ba\mathfrak{J}^p\theta)$$
$$(a^p = \mathfrak{J}, \ b^p = \theta, \ \mathfrak{J}^p = \theta^p = c^p = 1, \ ac = ca\theta, \ ab = ba, \ cb = bc\mathfrak{J})$$
$$\left[\begin{matrix} a^p = \mathfrak{J}, \ b^p = \theta, \ \mathfrak{J}^p = \theta^p = c^p = 1 \\ ac = ca\theta, \ ab = ba, \ cb = bc\mathfrak{J}^u, \qquad \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{matrix}\right].$$

88. Soit

$$c^p = \mathfrak{J}, \qquad a^p = b^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \qquad ab = ba\mathfrak{J}\theta^\delta, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon,$$
$$bc = cb\theta^\zeta.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^\lambda b^\mu \mathfrak{I}^\varphi, & \theta' &= \theta^\omega \mathfrak{I}^\tau, \\ b' &= a^\rho b^\sigma \mathfrak{I}^\psi, & \mathfrak{I}' &= \mathfrak{I}^n, \\ c' &= a^l b^m c^n, \end{aligned}$$

et exprimons que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\delta'}, \qquad a'c' = c'a'\theta'^{\varepsilon'}, \qquad b'c' = c'b'\theta'^{\zeta'}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} n + \tau\delta' &\equiv \lambda\sigma - \rho\mu, \\ \omega\delta' &\equiv \delta(\lambda\sigma - \rho\mu), \\ \tau\varepsilon' &\equiv \lambda m - \mu l, \\ \omega\varepsilon' &\equiv \varepsilon\lambda n + \delta(\lambda m - \mu l) + \zeta\mu n, \\ \tau\zeta' &\equiv \rho m - \sigma l, \\ \omega\zeta' &\equiv \varepsilon\rho n + \delta(\rho m - \sigma l) + \zeta\sigma n. \end{aligned}$$

Le groupe contient

$$\begin{aligned} &p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^2, \\ &p^4 - 1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad p. \end{aligned}$$

Il est défini par les équations

$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\mathfrak{I}\theta,\ ab = ba).$$

89. Soit

$$a^p = \theta, \qquad b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad ab = ba\theta^\alpha, \qquad ac = ca\theta^\beta,$$
$$ad = da\theta^\gamma, \qquad cd = dc\theta^\lambda, \qquad db = bd\theta^\mu, \qquad bc = cb\theta^\nu.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^\pi b^m c^n d^l, \\ b' &= b^x c^y d^z \theta^\sigma, \\ c' &= b^{x'} c^{y'} d^{z'} \theta^\tau, & \theta' &= \theta^\pi, \\ d' &= b^{x''} c^{y''} d^{z''} \theta^\upsilon \end{aligned}$$

et exprimons que

$$a'b' = b'a'\theta'^{\alpha'}, \qquad a'c' = c'a'\theta'^{\beta'}, \qquad \ldots.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\pi\alpha' &= \pi(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \lambda(mz - ny) + \mu(nx - lz) + \nu(ly - mx),\\
\pi\beta' &= \pi(\alpha x' + \beta y' + \gamma z') + \lambda(mz' - ny') + \mu(nx' - lz') + \nu(ly' - mx'),\\
\pi\gamma' &= \pi(\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'') + \lambda(mz'' - ny'') + \mu(nx'' - lz'') + \nu(ly'' - mx''),\\
\pi\lambda' &= \lambda(y'z'' - z'y'') + \mu(z'x'' - x'z'') + \nu(x'y'' - y'x''),\\
\pi\mu' &= \lambda(y''z - z''y) + \mu(z''x - x''z) + \nu(x''y - y''x),\\
\pi\nu' &= \lambda(yz' - zy') + \mu(zx' - xz') + \nu(xy' - yx').
\end{aligned}$$

Le groupe correspondant

$$\left(\begin{matrix} a^p = 0,\ b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\\ ad = da,\ cd = dc\theta,\ bd = db,\ bc = cb \end{matrix}\right)$$

a

$$\begin{aligned}
&p^4(p-1) \text{ opérations d'ordre } p^2,\\
&p^4 - 1 \qquad\quad » \qquad\quad » \quad p.
\end{aligned}$$

90. Soit

$$a_i^p = \theta^p = 1, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \qquad a_i a_j = a_j a_i \theta^{\alpha_{ij}} \qquad (\alpha_{ij} = -\alpha_{ij}).$$

Posons

$$a'_i = a_1^{x_{i1}} a_2^{x_{i2}} a_3^{x_{i3}} a_4^{x_{i4}} \theta^{x_i}, \qquad \theta' = \theta^\omega;$$

alors

$$a'_i a'_j = a'_j a'_i \theta'^{\alpha'_{ij}}$$

donne

$$\omega\alpha'_{ij} = \sum_{k,l} \alpha_{kl} x_{ik} x_{jl}.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned}
\omega^2(\alpha'_{23}\alpha'_{14} + \alpha'_{31}\alpha'_{24} + \alpha'_{12}\alpha'_{34}) = {} & (x_{11}x_{22}x_{33}x_{44})\\
& \times (\alpha_{23}\alpha_{14} + \alpha_{31}\alpha_{24} + \alpha_{12}\alpha_{34}).
\end{aligned}$$

Le groupe contiendra $p^3 - 1$ opérations d'ordre p.
On a ainsi

$$\left(\begin{matrix} a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\\ ad = da,\ cd = dc\theta,\ db = bd,\ bc = cb \end{matrix}\right) \qquad [\text{type } (1)(1,1,1,1)].$$

91. Prenons comme point de départ les équations suivantes :

$$a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad c^p = 0, \qquad ab = ba, \qquad ac = cab,$$
$$dc = cad, \qquad ad = dab^\delta \theta^\varepsilon, \qquad bd = db\theta^{\nu\delta}, \qquad bc = cb\theta^\nu.$$

Posons

$$\begin{aligned} c' &= d^n c^\pi a^l b^m, \\ a' &= d^r a^s b^t \theta^\varphi, \qquad \theta' = \theta^\pi, \\ b' &= d^\rho a^\sigma b^\tau \theta^\psi, \\ d' &= d^\lambda a^\mu b^\nu \theta^\omega \end{aligned}$$

et exprimons que l'on a

$$a'b' = b'a', \qquad a'c' = c'a'b', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$\rho = \sigma = r = 0.$$

d'où

$$\lambda\sigma\tau\pi \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

$$s \equiv \lambda\pi, \qquad \tau \equiv s(\delta n + \pi),$$

$$\psi \equiv (\delta n + \pi)\nu t + \left(\varepsilon n + \nu\delta^2 \frac{n(n-1)}{2} + \nu\delta n\pi + \nu\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right)s,$$

$$t \equiv \lambda\frac{\pi(\pi-1)}{2} + \delta\pi\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - \delta\lambda l + \mu\pi + \delta\mu n,$$

$$\begin{aligned} \varphi \equiv{}& \nu\delta(n\upsilon - \lambda m) + \varepsilon(\mu n - \lambda l) \\ &+ \nu\delta^2\left(\mu\frac{n(n-1)}{2} - l\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\right) + \nu\pi\upsilon + \varepsilon\pi\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} \\ &+ \nu\delta^2\pi\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6} + \nu\delta\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\frac{\pi(\pi-1)}{2} \\ &+ \nu\lambda\frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{6} + \nu\delta\mu n\pi + \mu\nu\frac{\pi(\pi-1)}{2}, \end{aligned}$$

$$\tau\delta' \equiv \delta s\lambda, \qquad \psi\delta' + \pi\varepsilon' \equiv \nu\delta\lambda t + \varepsilon s\lambda + \nu\delta^2 s\frac{\lambda(\lambda-1)}{2},$$

$$\pi\nu'\delta' \equiv \lambda\tau\nu\delta, \qquad \pi\nu' \equiv \nu\tau(\delta n + \pi).$$

La discussion de ces congruences conduit aux groupes sui-

vants :

$$\left(\begin{array}{c} a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1,\ c^p = \theta,\ ab = ba,\ ac = cab, \\ dc = cda,\ ad = dab,\ bd = db\theta,\ bc = cb\theta \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1,\ c^p = \theta,\ ab = ba,\ ac = cab,\ dc = cda, \\ ad = dab\theta,\ bd = db\theta^u,\ bc = cb\theta^u,\ u = 1, 2, \ldots, p-1 \end{array}\right).$$

Ces groupes sont du type (1)(1)(1)(1, 1).

$(a^p = \mathfrak{J},\ b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta,\ ab = bac,\ bc = cb\mathfrak{J}\theta)$ [type (1, 1)(1)(1, 1)];

$(a^p = \mathfrak{J},\ b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta,\ ab = bac,\ bc = cb\mathfrak{J})$ [type (1, 1)(1)(1, 1)];

$$\left.\begin{array}{l} a^p = b^p = d^p = \theta^p = 1, \\ ab = ba,\quad c^p = \theta, \\ ac = cab,\ dc = cad, \\ bd = db, \\ [\text{type } (1)(1)(1)(1, 1)], \end{array}\right\} \begin{array}{lll} \text{avec} & ad = da\theta, & bc = cb\theta, \\ \text{ou avec} & ad = da\theta^u, & bc = cb\theta, \quad \left(\frac{u}{p}\right) = -1; \\ \text{ou avec} & ad = da\theta, & bc = cb\theta^v, \quad \left(\frac{v}{p}\right) = -1; \\ \text{ou avec} & ad = da\theta^u, & bc = cb\theta^v, \quad \left(\frac{u}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{v}{p}\right) = -1; \\ \text{ou avec} & ad = da, & bc = cb\theta; \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{J},\ b^p = c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1,\ ac = ca\theta, \\ ab = bac,\ bc = cb\mathfrak{J}^u,\ \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{array}\right) \quad [\text{type } (1, 1)(1)(1, 1)].$$

92. Soit

$$a^p = b^p = c^p = \theta^p = 1, \qquad d^p = \theta, \qquad ab = ba, \qquad ac = cab,$$
$$dc = cda, \qquad ad = da\theta^\varepsilon, \qquad bd = db, \qquad bc = cb\theta^\nu.$$

Le groupe contient

$p^4(p-1)$ opérations d'ordre p^2,
$p^4 - 1$ » » p.

Posons

$$a' = a^l b^m c^n \theta^\alpha,$$
$$b' = a^\rho b^\sigma c^\tau \theta^\beta, \qquad \theta' = d'^\pi = \theta^\upsilon,$$
$$c' = a^\pi b^q c^r \theta^\gamma,$$
$$d' = a^\xi b^\eta c^\zeta d^\upsilon.$$

Écrivons que l'on a

$$a'b' = b'a', \qquad a'c' = c'a'b', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$\tau = n = \rho = \zeta = 0,$$

$$\sigma \equiv lr, \qquad \beta \equiv \nu\left(mr + l\frac{r(r-1)}{2}\right),$$

$$l \equiv r\upsilon, \qquad m \equiv r\xi + \upsilon\frac{r(r-1)}{2},$$

$$\alpha \equiv \varepsilon\upsilon(l-\pi) + \nu\xi\frac{r(r-1)}{2} + \nu r(\eta - r\xi)$$
$$+ \nu l\frac{r(r-1)}{2} + \nu\upsilon\frac{r(r-1)(r-2)}{6} + \varepsilon r\frac{\upsilon(\upsilon-1)}{2}$$
$$- \varepsilon r\upsilon^2 + \nu r(m - lr) - \nu r\upsilon\frac{r(r-1)}{2} - \nu r\left(\upsilon\frac{r(r-1)}{2} - r^2\upsilon\right),$$

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon l, \qquad \upsilon\nu' \equiv \sigma r\nu, \qquad \upsilon r l\sigma \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

On trouve les groupes

$$\begin{pmatrix} a^p = b^p = c^p = \theta^p = 1, & d^p = \theta, & ab = ba, \\ ac = cab, & dc = cda, & ad = da\theta, & bd = db \end{pmatrix},$$

puis

$$bc = cb\theta$$

ou

$$bc = cb\theta^u,$$

u étant tel que la congruence $\nu r^3 \equiv u$ (mod p) admet des solutions, alors que la congruence $\nu r^3 \equiv 1$ (mod p) n'en admet point ;

$$\begin{pmatrix} a^p = b^p = c^p = \theta^p = 1, & d^p = \theta, & ab = ba, \\ ac = cab, & dc = cda, & ad = da, & bd = db \end{pmatrix},$$

puis

$$bc = cb\theta$$

ou

$$bc = cb\theta^u,$$

u étant un nombre tel que la congruence $\nu r^3 \equiv u$ admet des solutions, alors que la congruence $\nu r^3 \equiv 1$ (mod p) n'en admet pas.

Enfin

$$(a^p = c^p = \theta^p = \mathfrak{I}^p = 1, \ d^p = \theta, \ ac = ca\mathfrak{I}, \ dc = cda, \ ad = da\theta).$$

93. Soit

$$a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \qquad ab = ba, \qquad ac = cab,$$
$$dc = cda, \qquad ad = da\theta^\varepsilon, \qquad bd = db, \qquad bc = cb\theta^\nu.$$

Ici, toutes les opérations sont d'ordre p.

Posons

$$a' = a^l b^m c^n d^\pi \theta^\alpha,$$
$$b' = a^q b^r c^s d^t \theta^\beta,$$
$$c' = a^\xi b^\eta c^\zeta d^\upsilon \theta^\gamma, \qquad \theta' = \theta^\omega,$$
$$d' = a^\rho b^\sigma c^\tau d^\iota \theta^\delta$$

et écrivons que l'on a

$$a'b' = b'a', \qquad a'c' = c'a'b', \qquad d'c' = c'd'a', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$n = \pi = q = s = t = \tau = 0, \qquad \text{d'où} \qquad lr\zeta\iota\omega \not\equiv 0 \qquad (\text{mod } p),$$

$$r \equiv \zeta l, \qquad \beta \equiv \varepsilon\upsilon l + \nu l \frac{\zeta(\zeta-1)}{2} + \nu\zeta m,$$

$$l \equiv \iota\zeta, \qquad m \equiv \rho\zeta + \iota\frac{\zeta(\zeta-1)}{2},$$

$$\begin{aligned}\alpha \equiv{}& \varepsilon\iota(l-\xi) + \varepsilon\upsilon(l+\rho)\\ &+ \nu(\rho+l)\frac{\zeta(\zeta-1)}{2} + \nu\zeta[m+\sigma-(l+\rho)\zeta]\\ &+ \nu\iota\frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)}{6} + \varepsilon\zeta\frac{\iota(\iota-1)}{2} - \nu\iota\zeta\frac{\zeta(\zeta-1)}{2} + \nu\iota\zeta\frac{\zeta(\zeta+1)}{2},\end{aligned}$$

$$\omega\varepsilon' \equiv \varepsilon\iota^2\zeta, \qquad \omega\nu' \equiv \nu\iota\zeta^3.$$

Voici les groupes que donne la discussion de ces congruences :

$$\left(\begin{matrix} a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \ ab = ba, \\ ac = cab, \ dc = cda, \ bd = db, \ bc = cb\theta \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ad = da\theta, \\ \text{puis avec} & ad = da \end{matrix}\right.\right),$$
$$(a^p = b^p = c^p = d^p = \theta^p = 1, \ bc = cb\mathfrak{I}, \ ab = bac, \ ac = ca\theta).$$

94. Soit

$$a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \qquad b^p = \mathfrak{I}, \qquad c^p = \theta, \qquad ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta,$$
$$cb = bca, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon.$$

Il y aura

$$p^3(p^2-1) \text{ opérations d'ordre } p^2,$$
$$p^3-1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad p.$$

Posons

$$a' = a'\mathfrak{J}^{\varphi}\theta^{\psi}, \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^m\theta^n,$$
$$b' = b^m c^n a^{\lambda}, \qquad \theta' = \mathfrak{J}^{\pi}\theta^q,$$
$$c' = b^{\pi} c^q a^{\mu}.$$

Écrivons que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{J}'\theta'^{\delta'}, \qquad c'b' = b'c'a', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$\pi\delta' \equiv m(l-1), \qquad q\delta' \equiv \delta lm + n(\varepsilon l - 1),$$
$$l \equiv mq - n\pi, \qquad q\varepsilon' \equiv l(\varepsilon q + \delta\pi), \qquad \pi(\varepsilon' - l) \equiv 0,$$
$$\varphi \equiv m\mu - \pi\lambda + q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2},$$
$$\psi \equiv \delta(m\mu - \pi\lambda) + \varepsilon(n\mu - \lambda q) + \varepsilon\left(m\frac{q(q-1)}{2} - \pi\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right) + \varepsilon nq(m-\pi).$$

Les groupes que donne la discussion de ces congruences sont définis par les équations

$$a^p = \mathfrak{J}, \qquad b^p = \theta, \qquad c^p = \mathfrak{J}^p = \theta^p = 1, \qquad ab = bac,$$

avec

$$ca = ac\mathfrak{J} \begin{cases} cb = bc\theta, \\ \text{ou} \quad cb = bc\mathfrak{J}\theta, \\ \text{ou} \quad cb = bc\mathfrak{J}^u\theta, \qquad \left(\dfrac{u}{p}\right) = -1, \end{cases}$$

ou avec

$$ca = ac\mathfrak{J}^{\varepsilon}, \qquad \varepsilon \not\equiv 0, \qquad \varepsilon \not\equiv 1, \qquad cb = bc\theta$$

[deux valeurs de ε, associées (mod p), donnant le même groupe].

95. Soit

$$a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \qquad c^p = \mathfrak{I}, \qquad b^p = \theta, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon,$$
$$ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta, \qquad cb = bca.$$

On a alors

$$p^3(p^2-1) \text{ opérations d'ordre } p^2,$$
$$p^3-1 \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad p.$$

Posons

$$a' = a^l \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi,$$
$$b' = b^m c^n a^\lambda, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^q \theta^\pi,$$
$$c' = b^\pi c^q a^\mu, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^n \theta^m.$$

Écrivons que

$$a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\delta'}, \qquad c'b' = b'c'a', \qquad \ldots.$$

On trouve

$$n\delta' \equiv lm - q, \qquad m\delta' \equiv \delta lm + \varepsilon ln - \pi,$$

$$\varphi \equiv m\mu - \pi\lambda + q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2},$$

$$\psi \equiv \delta(m\mu - \pi\lambda) + \varepsilon(n\mu - \lambda q) + \varepsilon\left(m\frac{q(q-1)}{2} - \pi\frac{n(n-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right) + \varepsilon nq(m-\pi),$$

$$n\varepsilon' \equiv l\pi, \qquad m\varepsilon' \equiv \delta l\pi + \varepsilon lq.$$

On a ainsi les groupes

$$\left(\begin{array}{l} a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \ c^p = \mathfrak{I}, \ b^p = \theta, \ ac = ca\theta^\varepsilon, \\ ab = ba\mathfrak{I}\theta, \ cb = bca \ (\varepsilon = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \end{array}\right),$$

puis les 3 groupes suivants :

$$\left[\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I}, \ b^p = \theta, \\ c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, \\ ab = bac, \ cb = bc\mathfrak{I} \end{array} \left\{\begin{array}{ll} \text{avec} & ca = ac\theta, \\ \text{ou avec} & ca = ac\theta^u, \\ \text{ou avec} & ca = ac, \end{array}\right. \quad \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \right].$$

96. Soit $a^p = b^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1$, $c^p = \mathfrak{I}$, $ac = ca\theta^\varepsilon$, $ab = ba\mathfrak{I}\theta^\delta$, $cb = bca$.

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi, \\ b' &= a^s b^t \mathfrak{I}^\sigma \theta^\tau, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^r, \\ c' &= a^\pi b^q c^r \theta^\alpha, \qquad \theta' = \theta^\omega. \end{aligned}$$

Exprimons que $a'c' = c'a'\theta'^{\varepsilon'}$, $a'b' = b'a'\mathfrak{I}'\theta'^{\delta'}$, $c'b' = b'c'a'$. Il vient

$$m \equiv 0, \qquad q \equiv 0, \qquad \omega\varepsilon' \equiv \varepsilon lr, \qquad r \equiv lt, \qquad \omega\delta' \equiv \delta lt \qquad (\bmod p),$$

$$l \equiv rt, \qquad \varphi \equiv t(l+\pi) - r\frac{t(t+1)}{2},$$

$$\psi = \varepsilon r(l-s) + \delta t(l+\pi) - \delta r\frac{t(t+1)}{2} - \varepsilon t\frac{r(r+1)}{2}.$$

D'où l'on conclut les groupes

$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ca = ac,\ \ cb = bc\mathfrak{I}\theta,\ ab = bac),$$
$$(a^p = \mathfrak{I},\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ca = ac\theta,\ cb = bc\mathfrak{I},\ \ ab = bac).$$

97. Soit $a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1$, $c^p = \mathfrak{I}$, $b^p = \theta$, $ac = ca\theta^\varepsilon$, $ab = ba\mathfrak{I}^u\theta^\delta$, $cb = cba$, $\left(\frac{u}{p}\right) = -1$.

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^l \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi, \\ b' &= b^m c^n a^\lambda, \qquad \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^q \theta^\pi, \\ c' &= b^\pi c^q a^\mu, \qquad \theta' = \mathfrak{I}^n \theta^m. \end{aligned}$$

Écrivons que $a'b' = b'a'\mathfrak{I}'^u\theta'^{\delta'}$, $c'b' = b'c'a'$, ...

On trouve

$$n\delta' \equiv u(lm - q), \qquad m\delta' + u\pi \equiv l(\varepsilon n + \delta m),$$

$$l \equiv mq - n\pi, \qquad \varphi \equiv u(m\mu - \pi l) + u\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \psi \equiv\ & \delta(m\mu - \pi\lambda) + \varepsilon(n\mu - q\lambda) + \varepsilon\left(m\frac{q(q-1)}{2} - \pi\frac{n(n-1)}{2}\right) \\ & + \delta\left(q\frac{m(m-1)}{2} - n\frac{\pi(\pi-1)}{2}\right) + \varepsilon nq(m-\pi), \end{aligned}$$

$$n\varepsilon' \equiv ul\pi, \qquad m\varepsilon' \equiv \delta l\pi + \varepsilon lq \qquad (\bmod p).$$

Si $\delta l - \delta' \not\equiv 0$, $n \not\equiv 0$, les congruences sont incompatibles.

Si $n \equiv 0$, $\pi \equiv 0$, on a les groupes

$$\left[\begin{array}{c} a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta,\ c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1,\ ca = ac\theta^\varepsilon,\ ab = bac,\ cb = bc\mathfrak{I}^u\theta \\ \varepsilon = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \qquad \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{array}\right],$$

puis

$$\left[\begin{array}{c|ll|c} a^p = \mathfrak{I},\ b^p = \theta, & & & \\ c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1 & \text{avec} & ca = ac\theta & \\ ab = bac,\ cb = bc\mathfrak{I}^u, & \text{ou avec} & ca = ac\theta^v, & \left(\frac{v}{p}\right) = -1 \\ \left(\frac{u}{p}\right) = -1 & \text{ou avec} & ca = ac & \end{array}\right].$$

98. Enfin, si $a^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1$, $c^p = \mathfrak{I}$, $b^p = 1$, $ac = ca\theta^\varepsilon$, $ab = ba\mathfrak{I}^u\theta^\delta$, $cb = bca$, en posant

$$\begin{array}{lll} a' = a^l b^m \mathfrak{I}^\varphi \theta^\psi, & & \\ b' = a^s b^t \mathfrak{I}^\sigma \theta^\tau, & \mathfrak{I}' = \mathfrak{I}^r & (\textit{voyez}\ \text{n}^\circ\ 96). \\ c' = a^\pi b^q c^r \theta^\alpha, & \theta' = \theta^\omega, & \end{array}$$

on trouve les groupes

$$\left[\begin{array}{c|ll|c} a^p = \mathfrak{I}, & & & \\ b^p = c^p = \mathfrak{I}^p = \theta^p = 1, & \text{avec} & cb = bc\mathfrak{I}^u\theta, & \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \\ ca = ac\theta,\ ab = bac & \text{ou avec} & cb = bc\mathfrak{I}^u, & \left(\frac{u}{p}\right) = -1 \end{array}\right].$$

CHAPITRE VI.

SUR LES GROUPES D'ORDRE $3^5 = 243$.

99. L'énumération des groupes d'ordre p^5 exige que les cas $p = 2$, $p = 3$ soient examinés à part. Nous avons déjà parlé des groupes d'ordre 32.

Je vais dire quelques mots des groupes d'ordre $3^5 = 243$, en m'arrêtant de préférence, en général, aux groupes particuliers au nombre 3.

Citons cependant, en ne donnant que leurs équations de définition, les groupes suivants (je laisse de côté les groupes décomposables) :

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^{27} = b^3 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^9),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ \mathfrak{I}^9 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}^9 = b^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ \mathfrak{I}^9 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^3),$$

$$(a^9 = \theta,\ b^9 = \theta^3 = 1,\ ab = ba^4\theta^\alpha,\ \alpha = 0, 1, 2),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \mathfrak{I}',\ \mathfrak{I}^3 = \mathfrak{I}'^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3 = \mathfrak{I}, \\ \mathfrak{I}^9 = b^3 = c^3 = 1 \end{array} \left\{\begin{array}{ll} \text{avec} & ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I}^3,\ ab = bac \\ \text{ou avec} & ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I}^6,\ ab = bac \\ \text{ou avec} & ac = ca\mathfrak{I}^3,\ bc = cb,\ ab = bac \end{array}\right.\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta, \\ \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = c^3 = 1,\ ab = bac \end{array} \left\{\begin{array}{ll} \text{avec} & ac = ca,\ bc = cb\theta \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta,\ bc = cb \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta^2,\ bc = cb \end{array}\right.\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \\ ab = bac \end{array} \left\{\begin{array}{ll} \text{avec} & ac = ca,\ bc = cb\theta \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta,\ bc = cb \end{array}\right.\right),$$

$$(\mathfrak{I}^{27} = b^3 = c^3 = 1,\ bc = cb\mathfrak{I}^9),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^9 = 1,\ ac = ca\theta^3),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}^\alpha \\ bc = cb\theta,\ ab = ba\mathfrak{I}\ (\alpha = 0, 1, 2) \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta, \\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1 \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ac = ca\mathfrak{I}, & bc = cb, & ab = ba\mathfrak{I}\theta \\ \text{ou avec} & ac = ca\mathfrak{I}\theta, & bc = cb\theta, & ab = ba\mathfrak{I} \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta, & bc = cb, & ab = ba\mathfrak{I} \end{matrix}\right.\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ c^3 = \theta,\ ac = ca \\ bc = cb\theta^\alpha,\ ab = ba\mathfrak{I}\ (\alpha = 0, 1, 2) \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I} \\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1 \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ac = ca, & bc = cb\theta, & ab = ba\mathfrak{I} \\ \text{ou avec} & ac = ca\theta, & bc = cb, & ab = ba\mathfrak{I} \end{matrix}\right.\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ c^3 = \theta,\ b^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^3 = 1,\ ac = ca,\ bc = cb\mathfrak{I}^\alpha \\ ab = ba\mathfrak{I}\theta,\ \alpha = 1, 2 \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = \theta,\ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\mathfrak{I}\theta \\ bc = cb,\ ab = ba\mathfrak{I} \end{matrix}\right),$$

$$(a^3 = \theta,\ b^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^9 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I}^3\theta),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta \\ ab = ba,\ cb = bc\mathfrak{I}^\alpha,\ \alpha = 1, 2 \end{matrix}\right),$$

$$(a^3 = \mathfrak{I},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta,\ bc = cb\mathfrak{I}\theta,\ ab = ba),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\ ad = da \\ cd = dc\theta,\ bd = db,\ bc = cb \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca,\ ad = da \\ cd = dc\theta,\ bd = db,\ bc = cb \end{matrix}\right).$$

100. Partons maintenant des équations de définition :

$$a^3 = \theta, \quad b^3 = \theta^\beta, \quad c^3 = d^3 = \theta^3 = 1, \quad ab = bac, \quad ac = ca\theta^\zeta,$$
$$ad = da\theta^\eta, \quad bc = cb\theta^\lambda, \quad bd = dbc^\delta\theta^\mu, \quad cd = dc\theta^{\delta\zeta}.$$

Alors

$$(a^l b^m c^n d^p \theta^q)^3 = \theta^{l+\beta m+\lambda\delta pm^2+\zeta ml^2+\delta\zeta lmp+\delta^2\zeta mp^2+2\lambda lm^2}.$$

Posons

$$a' = a^l b^m c^n d^p \theta^q, \qquad d' = a^{r'} b^{s'} c^{t'} d^{u'} \theta^{v'},$$
$$b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} d^{p'} \theta^{q'}, \qquad \theta' = \theta^{l+\beta m+\lambda\delta pm^2+\zeta ml^2+\delta\zeta lmp+\delta^2\zeta mp^2+2\lambda lm^2} = \theta^\Delta.$$
$$c' = a^r b^s c^t d^u \theta^v,$$

Et écrivons que $a'b' = b'a'c'$, $a'c' = c'a'\theta'^{\zeta'}$, ...

On trouve

$$t \equiv lm' - l'm + \delta(mp' - pm') \qquad (\text{mod } 3),$$

$$\begin{aligned}
\varrho \equiv\ & \delta\zeta t(p+p') + \eta(lp' - pl') + \zeta(ln' - nl') + \mu(mp' - p'm) \\
& + \delta^2\zeta\left(m\frac{p'(p'-1)}{2} - m'\frac{p(p-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\delta\left(p\frac{m'(m'-1)}{2} - p'\frac{m(m-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\left(l'\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\
& + \zeta\left(m\frac{l'(l'-1)}{2} - m'\frac{l(l-1)}{2}\right) + \lambda(mn' - nm') \\
& + \delta\zeta(np' - n'p) + \delta^2\zeta(m'p^2 - mp'^2) + \lambda mm'(l' - l),
\end{aligned}$$

$$\Delta\zeta' \equiv \zeta lt + \lambda mt - \delta\zeta pt,$$

$$ls' - r'm \equiv \delta(ps' - mu'),$$

$$\begin{aligned}
\Delta\eta' \equiv\ & \eta(lu' - r'p) + \zeta(lt' - r'n) + \mu(mu' - s'p) \\
& + \delta^2\zeta\left(m\frac{u'(u'-1)}{2} - s'\frac{p(p-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\delta\left(p\frac{s'(s'-1)}{2} - u'\frac{m(m-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\left(r'\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{s'(s'-1)}{2}\right) \\
& + \zeta\left(m\frac{r'(r'-1)}{2} - s'\frac{l(l-1)}{2}\right) \\
& + \lambda(mt' - ns') + \delta\zeta(nu' - t'p) + \delta^2\zeta(p^2s' - u'^2m) + \lambda ms'(r' - l),
\end{aligned}$$

$$\Delta\lambda' \equiv \zeta l't + \lambda m't - \delta\zeta p't, \qquad \Delta\delta'\zeta' \equiv \delta\zeta tu' - \zeta tr' - \lambda ts',$$

$$\delta' t \equiv l's' - r'm' + \delta(u'm' - p's'),$$

$$\begin{aligned}
\Delta\mu' + \delta'\varrho \equiv\ & \delta\delta'\zeta t(u'+p') + \eta(l'u' - r'p') + \zeta(l't' - r'n') \\
& + \mu(m'u' - s'p') + \delta^2\zeta\left(m'\frac{u'(u'-1)}{2} - s'\frac{p'(p'-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\delta\left(p'\frac{s'(s'-1)}{2} - u'\frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\
& + \lambda\left(r'\frac{m'(m'-1)}{2} - l'\frac{s'(s'-1)}{2}\right) \\
& + \zeta\left(m'\frac{r'(r'-1)}{2} - s'\frac{l'(l'-1)}{2}\right) + \lambda(m't' - n's') \\
& + \delta\zeta(n'u' - t'p') + \delta^2\zeta(p'^2s' - u'^2m') + \lambda m's'(r' - l') \\
& (\text{mod } 3).
\end{aligned}$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac.\ ac = ca\theta^\zeta,\ ad = da \\ bc = cb\theta,\ bd = dbc,\ cd = dc\theta^\zeta, \qquad \zeta = 1, 2 \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca\theta \\ ad = da,\ bc = cb\theta,\ bd = dbc,\ cd = dc\theta \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca^\zeta,\ ad = da \\ bc = cb,\ bd = dbc,\ cd = dc\theta^\zeta, \qquad \zeta = 1, 2 \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da\theta,\ bc = cb\theta,\ bd = dbc,\ cd = dc \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da,\ bc = cb\theta,\ bd = dbc,\ cd = dc \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca\theta \\ bc = cb,\ ad = da,\ bd = db\theta,\ cd = dc \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca\theta \\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = dbc,\ cd = dc\theta \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da\theta,\ bc = cb\theta,\ bd = dbc,\ cd = dc \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ ad = da,\ bc = cb\theta,\ bd = dbc,\ cd = dc \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca\theta \\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = db\theta,\ cd = dc \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta, \\ d^3 = \theta^3 = \vartheta^3 = 1, \\ ab = ba\vartheta \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \text{avec} & ad = da\theta,\ bd = db\vartheta\theta \\ \text{ou avec} & ad = da\theta,\ bd = db\vartheta \\ \text{ou avec} & ad = da,\ bd = db\vartheta\theta \\ \text{ou avec} & ad = da,\ bd = db\vartheta \end{matrix}\right.\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ bc = cb\theta,\ bd = db,\ cd = dc,\ ad = db\theta \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ d^3 = \theta^3 = \vartheta^3 = 1,\ ab = ba\vartheta \\ bd = db,\ ad = da\theta \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta,\ d^3 = \theta^3 = \vartheta^3 = 1,\ ab = ba\vartheta \\ bd = db\theta,\ ad = da \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = bac,\ ac = ca \\ bc = cb\theta,\ bd = db,\ cd = dc,\ ad = da\theta \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = \theta^3 = \vartheta^3 = 1,\ ab = ba\vartheta \\ ac = ca,\ bc = cb\theta \end{matrix}\right).$$

101. Partons des équations de définition suivantes

$$a^3 = \theta, \qquad b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1, \qquad ab = ba\theta^\alpha, \qquad ac = ca,$$
$$ad = da\theta^\beta, \qquad bc = cb\theta^\gamma, \qquad bd = dbc, \qquad cd = dc\theta^\delta.$$

Posons

$$a' = a^l b^m c^n d^p \theta^q,$$
$$b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} d^{p'} \theta^{q'},$$
$$c' = a^r b^s c^t d^u \theta^v,$$
$$d' = a^{r'} b^{s'} c^{t'} d^{u'} \theta^{v'}.$$

Alors

$$(a^l b^m c^n d^p \theta^q)^3 = \theta^{l+\gamma pm^2+\delta mp^2};$$

on posera

$$\theta' = \theta^{l+\gamma pm^2+\delta mp^2}.$$

En exprimant que $b'd' = d'b'c'$, ..., il vient

$$l' + \gamma p' m'^2 + \delta m' p'^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3),$$
$$r' + \gamma u' s'^2 + \delta s' u'^2 \equiv 0,$$
$$mp' - pm' \equiv 0,$$
$$(l + \gamma pm^2 + \delta mp^2)\alpha' \equiv \beta(lp' - pl') + \gamma\left(p\frac{m'(m'-1)}{2} - p'\frac{m(m-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(m\frac{p'(p'-1)}{2} - m'\frac{p(p-1)}{2}\right) + \alpha(lm' - ml')$$
$$+ \gamma(mn' - nm') + \delta[p'(n - mp') - p(n' - m'p)],$$
$$t(\delta p - \gamma m) \equiv 0, \qquad \delta p - \gamma m \equiv 0, \qquad s'p - mu' \equiv 0,$$
$$(l + \gamma pm^2 + \delta mp^2)\beta' \equiv \beta(lu' - pr') + \gamma\left(p\frac{s'(s'-1)}{2} - u'\frac{m(m-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(m\frac{u'(u'-1)}{2} - s'\frac{p(p-1)}{2}\right) + \alpha(ls' - r'm)$$
$$+ \gamma(mt' - s'n) + \delta[u'(n - mu') - p(t' - s'p)],$$
$$(l + \gamma pm^2 + \delta mp^2)\gamma' \equiv \gamma m't - \delta p't, \qquad t \equiv m'u' - s'p',$$
$$-v + \delta t(u' + p') \equiv \beta(r'p' - l'u') + \gamma\left(u'\frac{m'(m'-1)}{2} - p'\frac{s'(s'-1)}{2}\right)$$
$$+ \delta\left(s'\frac{p'(p'-1)}{2} - m'\frac{u'(u'-1)}{2}\right) + \alpha(r'm' - l's')$$
$$+ \gamma(s'n' - m't') + \delta[p'(t' - s'p') - u'(n' - m'u')],$$
$$(l + \gamma pm^2 + \delta mp^2)\delta' \equiv \delta u't - \gamma s't.$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \theta,\ b^3 = c^3 = d^3 = \theta^3 = 1,\ ab = ba\theta,\ ac = ca \\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = dbc,\ cd = dc\theta \end{matrix}\right),$$
$$(\mathfrak{I}^9 = b^3 = c^3 = d^3 = 1,\ bc = cb,\ bd = dbc,\ cd = dc\mathfrak{I}^3).$$

102. Soit

$$a^3 = b^3 = c^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^3 = 1, \qquad ab = ba\mathfrak{I}, \qquad ac = ca\theta^\eta,$$
$$bc = cb\theta^\mu.$$

Faisons le changement d'opérations génératrices que voici

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m c^n \theta^\alpha \mathfrak{I}^\beta, \\ b' &= a^{l'} b^{m'} c^{n'} \theta^{\alpha'} \mathfrak{I}^{\beta'}, & \theta' &= \theta^\gamma \mathfrak{I}^\delta, \\ c' &= a^{l''} b^{m''} c^{n''} \theta^{\alpha''} \mathfrak{I}^{\beta''}, & \mathfrak{I}' &= \theta^{\gamma'} \mathfrak{I}^{\delta'}. \end{aligned}$$

Écrivons que $a'b' = b'a'\mathfrak{I}'$, ...; il vient

$$\begin{aligned} \delta' &\equiv lm' - ml', & \gamma' &\equiv \eta(ln' - nl') + \mu(mn' - nm'), \\ \delta\eta' &\equiv lm'' - ml'', & \gamma\eta' &\equiv \eta(ln'' - nl'') + (mn'' - nm''), \\ \delta\mu' &\equiv l'm'' - l''m', & \gamma\mu' &\equiv \eta(l'n'' - l''n') + \mu(m'n'' - m''n'). \end{aligned}$$

Leur discussion donne le groupe

$$(a^3 = b^3 = c^3 = \theta^3 = \mathfrak{I}^3 = 1,\ ab = ba\mathfrak{I},\ ac = ca\theta,\ bc = cb),$$

plus un groupe décomposable.

103. Partons des équations de définition que voici

$$a^3 = \theta, \qquad b^3 = \theta^\beta, \qquad c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \qquad bc = cb\mathfrak{I},$$
$$ab = bac, \qquad ac = ca\theta^\varepsilon.$$

Alors

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{I}^p \theta^q)^3 = \theta^{l+\beta m+\varepsilon ml^2} \mathfrak{I}^{2lm^2}.$$

Faisons le changement d'opérations génératrices suivant

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m c^n \mathfrak{I}^p \theta^q, \\ b' &= a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{I}^{p'} \theta^{q'}, & \mathfrak{I}' &= \theta^\varphi \mathfrak{I}^\psi, \\ c' &= a^{l''} b^{m''} c^{n''} \mathfrak{I}^{p''} \theta^{q''}. \end{aligned}$$

On en déduit les congruences

$$\beta'(l + \beta m + \varepsilon m l^2) \equiv l' + \beta m' + \varepsilon m' l'^2 \qquad (\text{mod } 3),$$

$$l m^2 \beta' \equiv l' m'^2, \qquad l'' + \beta m'' + \varepsilon m'' l''^2 \equiv 0, \qquad l'' m''^2 \equiv 0,$$

$$l' m'' - m' l'' \equiv 0,$$

$$\varphi + \varepsilon\left(m'' \frac{l'(l'-1)}{2} - l' n''\right) \equiv \varepsilon\left(m' \frac{l''(l''-1)}{2} - l'' n'\right),$$

$$\psi + l' \frac{m''(m''-1)}{2} - n'' m' + l' m' m''$$

$$\equiv l'' \frac{m'(m'-1)}{2} - n' m'' + l'' m' m'',$$

$$n'' \equiv l m' - m l',$$

$$p'' \equiv m m'(l' - l) + m n' - n m' + l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2},$$

$$q'' \equiv \varepsilon(l n' - n l') + \varepsilon\left(m \frac{l'(l'-1)}{2} - m' \frac{l(l-1)}{2}\right),$$

$$l m^2 \varepsilon' \equiv m n'',$$

$$\varepsilon'(l + \beta m + \varepsilon m l^2) \equiv -\varepsilon l n''.$$

La discussion de ces congruences donne les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = \theta, \ c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \ bc = cb\mathfrak{I}, \ ab = bac \\ ac = ca\theta^\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2) \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I}, \ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \ bc = cb\theta \\ ab = bac, \ ac = ca\mathfrak{I} \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{I}, \ b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \ ac = ca\theta, \ ab = bac, \ bc = cb\mathfrak{I}^\alpha \\ \alpha = 1, 2 \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = b^3 = c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \ bc = cb\mathfrak{I} \\ ab = bac, \ ac = ca\theta \end{matrix}\right).$$

104. Soit

$$a^3 = \mathfrak{I}, \qquad b^3 = \theta^\beta, \qquad c^3 = \mathfrak{I}^3 = \theta^3 = 1, \qquad ab = bac,$$

$$ac = ca\theta^\varepsilon, \qquad cb = bc\mathfrak{I}\theta^\delta,$$

d'où

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{I}^p \theta^q)^3 = \mathfrak{I}^{l(1+m^2)} \theta^{\beta m + \varepsilon m l^2 + \delta l m^2}.$$

Posons

$$\begin{aligned} a' &= a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q, & & \\ b' &= a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{J}^{p'} \theta^{q'}, & \theta' &= \theta^{\varphi} \mathfrak{J}^{\psi}, \\ c' &= c^{n''} \mathfrak{J}^{p''} \theta^{q''}, & \mathfrak{J}' &= \mathfrak{J}^{l(1+m^2)} \theta^{\beta m + \varepsilon m l^2 + \delta l m^2}, \end{aligned}$$

on a les congruences (mod 3)

$$n'' \equiv lm' - ml', \qquad \psi\beta' \equiv l'(1 + m'^2),$$

$$p'' \equiv nm' - mn' + l\frac{m'(m'-1)}{2} - l'\frac{m(m-1)}{2} + mm'(l' - l),$$

$$\varphi\beta' \equiv \beta m' + \varepsilon m' l'^2 + \delta l' m'^2,$$

$$\begin{aligned} q'' \equiv\ & \delta\left(l\frac{m'(m'-1)}{2} - l'\frac{m(m-1)}{2}\right) \\ & + \varepsilon\left(m\frac{l'(l'-1)}{2} - m'\frac{l(l-1)}{2}\right) \\ & + \varepsilon(ln' - nl') + \delta(nm' - mn') + \delta mm'(l - l'), \end{aligned}$$

$$\psi\varepsilon' + mn'' \equiv 0, \qquad \varphi\varepsilon' \equiv \varepsilon ln'' - \delta mn'',$$

$$\delta'\psi + l(1 + m^2) \equiv m'n'',$$

$$\delta'\varphi + \beta m + \varepsilon ml^2 + \delta lm^2 \equiv \delta m'm'' - \varepsilon l'n'' \qquad (\text{mod } 3),$$

on obtient ainsi les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{J},\ b^3 = 0,\ c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^{\alpha},\ cb = bc\mathfrak{J}\theta^{\beta} \\ ab = bac \qquad (\alpha = 0, 1, 2;\ \beta = 0, 1) \end{matrix}\right),$$

puis

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{J},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^{\alpha},\ cb = be\mathfrak{J}\theta^{\beta},\ ab = bac \\ \text{(le cas } \alpha = \beta = 0 \text{ donne un groupe décomposable)} \end{matrix}\right).$$

105. Notons encore les groupes

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{J},\ b^3 = 0,\ c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^{\alpha},\ cb = bc\mathfrak{J}^2\theta^{\beta} \\ ab = bac \qquad (\alpha = 0, 1, 2;\ \beta = 0, 1) \end{matrix}\right),$$

$$\left(\begin{matrix} a^3 = \mathfrak{J},\ b^3 = c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1,\ ac = ca\theta^{\alpha},\ cb = bc\mathfrak{J}^2\theta^{\beta},\ ab = bac \\ (\alpha = \beta = 1) \qquad (\alpha = 0,\ \beta = 1) \end{matrix}\right).$$

106. Partons enfin des équations de définition

$$a^3 = \mathfrak{J}, \qquad b^3 = \mathfrak{J}^2\theta^\beta, \qquad c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1, \qquad bc = cb\mathfrak{J}\theta^\gamma,$$
$$ab = bac, \qquad ac = ca\,\theta^\varepsilon,$$

d'où

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q)^3 = \mathfrak{J}^{l+2m+2lm^2}\theta^{\beta m+\varepsilon ml^2+2\gamma lm^2}.$$

1° Si $\beta = 1$, posons alors

$$a' = a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q,$$
$$b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{J}^{p'} \theta^{q'},$$
$$c' = c^{n''} \mathfrak{J}^{p''} \theta^{q''}.$$

On trouve

$$n'' \equiv lm' - l'm,$$

$$p'' \equiv mn' - m'n + \left(l'\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{m'(m'-1)}{2}\right) + (l'-l)mm',$$

$$\begin{aligned} q'' \equiv\ & \gamma\left(l'\frac{m(m-1)}{2} - l\frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\ & + \varepsilon\left(m\frac{l'(l'-1)}{2} - l\frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\ & + \gamma(mn' - nm') + \gamma mm'(l'-l) + \varepsilon(ln' - nl'), \end{aligned}$$

$$l + 2m + 2lm^2 + \gamma'[l + l' + 2(m+m') + 2(lm^2 + l'm'^2)] \equiv m'n'',$$

$$\begin{aligned} & m + \varepsilon ml^2 + 2\gamma lm^2 \\ & \quad + \gamma'[m + m' + \varepsilon(ml^2 + m'l'^2) + 2\gamma(lm^2 + l'm'^2)] \equiv \gamma m'n'' + \varepsilon l'n'', \end{aligned}$$

$$\varepsilon'[m + m' + \varepsilon(ml^2 + m'l'^2) + 2\gamma'(lm^2 + l'm'^2)] \equiv \gamma mn'' + \varepsilon ln''.$$

2° Si l'on part des équations de définition

$$a^3 = b^3 = \theta, \qquad c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1, \qquad bc = cb\mathfrak{J}^\gamma\theta,$$
$$ab = bac, \qquad ac = ca\mathfrak{J}^\varepsilon,$$

il vient

$$(a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q)^3 = \theta^{l+m+2lm^2}\mathfrak{J}^{\varepsilon ml^2+2\gamma lm^2}.$$

Posons

$$a' = a^l b^m c^n \mathfrak{J}^p \theta^q, \qquad \theta' = \mathfrak{J}^{\varepsilon ml^2+2\gamma lm^2}\theta^{l+m+2lm^2},$$
$$b' = a^{l'} b^{m'} c^{n'} \mathfrak{J}^{p'} \theta^{q'}, \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J}^{\mathfrak{p}}\theta^{\mathfrak{q}},$$
$$c' = c^{n''} \mathfrak{J}^{p''} \theta^{q''},$$

on a

$$\varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2 \equiv \varepsilon m' l'^2 + 2\gamma l' m'^2,$$

$$l + m + 2 l m^2 \equiv l' + m' + 2 l' m'^2,$$

$$n'' \equiv l m' - m l',$$

$$q'' \equiv m n' - n m' + l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2} + (l' - l) m m',$$

$$\begin{aligned} p'' \equiv{} & \gamma\left(l' \frac{m(m-1)}{2} - l \frac{m'(m'-1)}{2}\right) \\ & + \varepsilon\left(m \frac{l'(l'-1)}{2} - m' \frac{l(l-1)}{2}\right) \\ & + \gamma(m n' - n m') + \gamma m m'(l' - l) + \varepsilon(l n' - n l'), \end{aligned}$$

$$\psi\gamma' + l + m + 2 l m^2 \equiv m' n'',$$

$$\varphi\gamma' + \varepsilon m l^2 + 2\gamma l m^2 \equiv \gamma m' n'' + \varepsilon l' n'',$$

$$\psi\varepsilon' \equiv m n'',$$

$$\varphi\varepsilon' \equiv \gamma m n'' + \varepsilon l n''.$$

1° Si $\beta = 1$ on obtient les groupes

$$\left(\begin{array}{c} a^3 = \mathfrak{J},\ b^3 = \mathfrak{J}^2\theta,\ c^3 = \mathfrak{J}^3 = \theta^3 = 1,\ bc = cb\mathfrak{J} \\ ab = bac,\ ac = ca\theta^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2) \end{array}\right),$$

2° Si $\beta = 0$ on obtient un groupe décomposable.

TABLE DES MATIÈRES.

		Pages.
INTRODUCTION		1
CHAPITRE I.	— Table de multiplication	3
CHAPITRE II		11
CHAPITRE III.	— Sur les groupes d'ordre 2^5	26
CHAPITRE IV.	— Sur quelques groupes d'ordre 2^n	52
CHAPITRE V.	— Sur les groupes d'ordre p^5	60
CHAPITRE VI.	— Sur les groupes d'ordre $3^5 = 243$	85

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
35498 Quai des Grands-Augustins, 55.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
514.7L57Q C001
QUELQUES CONSIDERATIONS SUR LES GROUPES
3 0112 017116945